member of the Edinburgh Mathematical Society. He was made an honorary member of the London Mathematical Society in 1924.

In preparing this notice I have received valuable assistance from Dr. Enrico Volterra, Prof. Beniamino Segre, Sir Arthur Eddington, Mr. L. A. Pars, and Prof. E. T. Whittaker.

ÉMILE PICARD

J. HADAMARD.

Avec la mort d'Emile Picard, le 12 Décembre 1941, une des plus grandes personnalités de la science contemporaine a disparu.

Charles Émile Picard* naquit à Paris le 24 Juillet 1856. Au Lycée Henri IV (en ce temps-là Lycée Napoléon) où il fit ses études secondaires, il excellait en version grecque, en vers latins, en histoire, mais détestait délibérément la géométrie, qu'il apprenait *par coeur*, pour éviter les punitions! Au contraire, à l'âge de 15 ans, lorsque, dans la classe de seconde, il fit connaissance avec l'algèbre, il fut aussitôt fortement séduit, tendance qu'il garda toute sa vie. Cependant, deux ans plus tard, dans la classe de mathématiques, il avait cessé d'être rebelle à la géométrie; ses maîtres se formèrent rapidement une haute opinion de lui: ils eurent à triompher des hésitations de sa mère pour lui faire poursuivre une carrière scientifique. Comme tout jeune français de notre époque possédant des dons scientifiques, il eut à choisir entre l'École Polytechnique, préparant en principe à des carrières d'ingénieurs, et l'École Normale consacrée à la science pure. Il se décida en faveur de cette dernière, où il fut reçu premier: on dit que cette décision fut prise après une émouvante visite à Pasteur, dans laquelle le père de la bactériologie parla de la science pure et désintéressée en termes si nobles que son jeune interlocuteur fut définitivement convaincu.

Émile Picard passa à l'École Normale Supérieure les trois années réglementaires, de 1874 à 1877, puis fut nommé "agrégé préparateur" pour l'année scolaire 1877–1878. Entre temps, il avait obtenu le titre de Docteur avec une thése sur les "Applications des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches".

Immédiatement après sa quatrième année d'École Normale, il fut nommé à l'Université de Paris, à titre temporaire cependant: car l'année

* Cette notice est conforme au texte anglais qui a paru dans les *Proceedings of the Royal Society*. Toutefois, ce qui est relatif aux courbes et surfaces algébriques ainsi qu'aux transcendantes qui leur sont attachées est dû à M. Claude Chevalley, que je tiens à remercier ici de sa [illegible]cieuse collaboration.

suivante (Novembre 1879), il était envoyé à l'Université de Toulouse dont le doyen, Baillaud, avait demandé sa venue et écrivit plus tard que "cette nomination avait été la véritable cause du développement scientifique de la Faculté des Sciences". Mais en Octobre 1881 il fut rappelé à l'Université de Paris, à laquelle il appartint jusqu'à sa retraite : il y fut nommé Chargé de Cours à peu près en même temps que Poincaré et Appell, ses contemporains. Peu après, tous trois devinrent Professeurs titulaires, à l'âge de trente ans requis par les réglements. Des nominations aussi rapides à l'Université de la capitale de la France n'auraient guère été possibles quelques années plus tard : on doit dire qu'elles eurent lieu non seulement en raison de la haute valeur des trois savants, mais aussi en raison du fait que la carrière universitaire était notablement moins encombrée qu'elle ne l'est devenue depuis.

Les quatre premières années qui suivirent le retour de Picard à la Sorbonne furent consacrées à l'enseignement de la mécanique rationnelle; il en fut de même de son enseignement à l'École Normale pendant l'année scolaire 1885–1886, où l'auteur de ces lignes eut la bonne fortune de suivre ses conférences. Elles étaient pleines d'idées et de théories suggestives, faisant contraste avec le programme, assez ennuyeux à cette époque, de la mécanique classique. Picard aimait à dire combien fructueuse avait été pour son travail ultérieur cette incursion dans le domaine de la mécanique, comme le fut sa nomination analogue (1934) à l'École Centrale de Paris.

Après avoir été transféré à la chaire de calcul différentiel et intégral à la Sorbonne (1886–1897), il occupa, à partir de 1897, la chaire d'algébre et analyse supérieures : tâche plus lourde, puisqu'il avait à changer de sujet chaque année et à passer en revue les parties les plus difficiles de la science contemporaine, mais tâche des plus intéressantes pour lui, qui lui permit d'exercer pendant des années une influence puissante sur tous les jeunes mathématiciens français.

Picard devint membre de l'Académie des Sciences de Paris en 1889 et fut aussi membre de nombreuses Académies et Sociétés scientifiques étrangères. Il fut élu membre honoraire de cette Société en 1898 et de la Société Royale de Londres en 1909.

En 1917, après que sa vie eut été cruellement assombrie par la perte de son fils tombé au champ d'honneur, un nouveau sphère d'activité s'ouvrit pour lui par sa nomination de Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. Il était merveilleusement qualifié pour ces nouvelles fonctions, grâce à sa vive intelligence capable de s'attaquer et de s'intéresser à tous les ordres de sujets, et c'est ainsi qu'au cours d'une croisière en Egypte il se mit à l'étude des hiéroglyphes, Quelques années plus tard (1924), il fut élu à l'Académie française, à un siège que cette Académie de destination littéraire a coutume de réserver à des savants et qui avait été vacant depuis la mort de Poincaré. En 1937, il reçut une haute récompense internationale, la médaille Mittag-Leffler.

Il n'est pas possible de passer en revue tous les aspects de l'œuvre étendue et variée de Picard : nous nous limiterons aux productions les plus marquantes, en omettant parfois des contributions importantes.

Son premier travail, sa thèse, traite de questions géométriques. Sans être une de ses oeuvres les plus remarquables, elle contient déjà plusieurs resultats élégants et aujourd'hui classiques, tels qu'une propriété importante de l'équation de Riccati et son application aux lignes asymptotiques des surfaces réglées. Peu après, il démontra que la seule surface algébrique, à l'exception des surfaces réglées unicursales, dont toutes les sections planes soient unicursales est la surface de Steiner. C'était le temps où tous les jeunes normaliens étaient séduits par le prestige de Darboux ; mais plus tard, comme l'y portait son tempérament, il devint et resta un pur analyste. En cela, il peut avoir été quelque peu influencé par Hermite, qui exerça aussi sur lui une action puissante et durable. Hermite, avec lequel il ne cessa d'être en étroite communion d'idées, et dont la fille devint sa femme (1890), était un fervent de l'analyse plutot que de la géométrie. En fait, Picard, après son résultat ci-dessus mentionné sur la surface de Steiner, ne s'occupa plus de géométrie, car nous ne saurions compter parmi les recherches géométriques celles qui concernent la géométrie algébrique et dont les méthodes appartiennent en réalité à l'algébre et l'analyse.

Le caractère distinctif des travaux de Picard sur la théorie des fonctions algébriques est l'exploitation systématique de ce que l'on appelle aujourd'hui les méthodes "transcendantes". C'était déjà le point de vue auquel s'était placé Riemann dans la théorie des courbes ; par contre, Noether et les géomètres italiens influencés par lui avaient principalement développé les méthodes algébraico-géométriques, aussi bien dans l'étude des courbes que dans celle qu'ils avaient inaugurée, des surfaces. Les recherches de Picard se rapportent au contraire à la théorie des intégrales de différentielles rationnelles sur les surfaces, généralisant les intégrales abéliennes attachées à une courbe.

Quand on passe d'une à deux variables, les intégrales à considérer se répartissent en deux catégories : les intégrales simples $\int P\,dx + Q\,dy$, les intégrales doubles $\iint P\,dx\,dy$. Seules celles de la seconde catégorie avaient été considérées brièvement par Noether. La raison en est probablement que la considération des intégrales simples n'est fructueuse que si, avec Picard, on se limite aux différentielles $P\,dx+Q\,dy$ qui sont localement (mais non globalement) des différentielles exactes. Ce n'est que pour de pareilles intégrales que l'on peut définir des périodes analogues aux périodes d'une intégrale abélienne sur une courbe. Encore faut-il pour cela faire usage de la topologie de la surface algébrique, considerée comme une variété à quatre dimensions réelles. C'est pourquoi le second chapitre de la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* par Picard et Simart (dont le premier volume parut en 1897) traite de la Géometrie de situation, à laquelle Poincaré venait, deux ans auparavant, de consacrer son mémoire bien connu dans le *Journal de l'École Polytechnique.*

Ayant posé la définition correcte des intégrales simples sur la surface, Picard procède à leur classification en intégrales de première, seconde et troisième espèce. Il constate qu'une surface "générale" ne possède pas d'intégrales de première ou de seconde espèce. Il montre que la question de savoir si une surface donnée admet des intégrales de première espèce dépend de celle de la nature analytique des solutions d'une certaine équation différentielle attachée à la surface. Si une surface possède des intégrales de premiere espèce, le nombre de ces intégrales qui sont linéairement indépendantes est un invariant birationnel de la surface; cet invariant q est égal à l'irrégularité de la surface, différence entre son genre géométrique et son genre arithmétique; il peut aussi se caractériser par le fait que la surface contient un systeme algébrique de courbes qui se compose d'une famille à q parametres de systèmes linéaires. Le nombre $2q$ est égal au nombre des intégrales simples de seconde espèce linéairement indépendantes; il est aussi égal au premier nombre de Betti de la surface. La démonstration des théorèmes très profonds que nous venons d'énoncer a requis les efforts simultanés de Humbert, Enriques, Severi, Picard et enfin (pour le pas decisif) Poincaré.

La considération des intégrales simples de troisième espèce a conduit Picard à la définition d'un nouvel invariant, généralement connu sous le nom de "nombre ρ" (invariant relatif, l'invariance ayant seulement lieu pour les transformations birationnelles sans singularités).

ρ courbes tracées sur la surface peuvent toujours être prises comme courbes logarithmiques d'une intégrale de troisième espèce, tandis qu'il est impossible de trouver une intégrale admettant $\rho-1$ courbes arbitraires comme courbes logarithmiques. L'invariant ρ est intervenu à un tout autre point de vue dans les recherches de Severi (théorème de la base): il caractèrise la structure de l'ensemble des systèmes complets de courbes sur la surface. Une circonstance surprenante, découverte par Picard, est que le nombre ρ dépend de propriétés arithmétiques des coefficients de l'équation qui définit la surface.

Le nombre ρ apparaît aussi dans la théorie des intégrales doubles de seconde espèce. Picard dit que la différentielle double $P\,dx\,dy$ est de seconde espèce quand elle est partout (localement) la dérivée extérieure d'une différentielle simple. Picard a réussi à déterminer le nombre des intégrales doubles de seconde espèce distinctes; la valeur de ce nombre dépend du nombre ρ.

Les travaux de Picard sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables forment aujourd'hui l'un des aspects essentiels de cette branche des mathématiques. Les résultats de ces travaux se trouvent d'ailleurs dans une large mesure amalgamés avec ceux des travaux de l'école purement géométriste italienne dans les travaux de Severi. Un autre aspect fondamental de la théorie est l'aspect topologique. Les premiers linéaments de la theorie topologique des surfaces algébriques se trouvent, comme nous l'avons déjà dit, chez Picard. Les résultats essentiels ont été depuis obtenus par Lefschetz qui a notamment donné une interprétation topologique au nombre ρ de Picard.

On voit combien féconde pour la marche ultérieure de la science a été l'oeuvre de Picard en géomètrie algébrique. Independamment des conséquences directes dont nous venons d'énumérer les principales, d'autres plus lointaines peuvent être signalées. C'est ainsi que la théorie des intégrales de première espèce repose sur la considération de l'équation différentielle à laquelle satisfont les périodes de ces intégrales sur une courbe qui varie dans un faisceau linéaire. Or cette équation, qui est du type de Fuchs, possède des propriétés analytiques remarquables.

Tout cela découle des résultats contenus dans le mémoire qui remporta en 1888 le Grand Prix des Sciences Mathématiques à l'Académie des Sciences de Paris, ainsi que dans la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables independantes* en deux volumes, parue en 1897 et 1906, ouvrages qui ont été fondamentaux dans ce chapitre de la science.

Par la suite, tout en vouant son fructueux labeur à d'autres branches de l'analyse, Picard ne perdit jamais complètement de vue celle-là. Il y revint fréquemment dans son enseignement d'"algébre et analyse supérieures" à la Sorbonne et, dans la dernière période de sa vie, il lui consacra son ouvrage intitulé *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques* publié dans les *Cahiers scientifiques* de Julia (Paris, 1931) et qui, lui aussi, est un instrument de travail essentiel à quiconque s'intéresse à ces difficiles théories.

Le titre de cet ouvrage ne correspond pas à proprement parler à son contenu qui consiste plutot dans les applications de l'analyse à l'étude des courbes et des surfaces algébriques. Il n'est pas inutile de mentionner ce fait, car, à l'heure actuelle, la Géomètrique algébrique a trouvé des applications analytiques d'un intérêt tout particulier. Cette étude des courbes et des surfaces algébriques, qui avait longtemps été un domaine fermé sur lui-même, a cessé de l'être depuis les travaux de Fredholm et de ses successeurs—comme Herglotz, Zeilon, Florent Bureau—sur la solution élémentaire des équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre quelconque. Se bornant aux équations à coefficients constants dépourvues de termes d'ordre inférieur (auxquelles le cas général peut se ramener à l'aide d'équations intégrales), Fredholm a montré que, pour les équations à trois variables indépendantes, la solution cherchée introduit des intégrales abéliennes étendues à une certaine courbe algébrique. De même, le traitement des équations à quatre variables introduirait une surface algébrique et les intégrales doubles correspondantes et ainsi de suite, la considération d'hypersurfaces devenant nécessaire lorsque le nombre des variables dépasse quatre. Ceci, nous le voyons, donne une signification nouvelle aux recherches de Picard, puisque les propriétés des domaines algébriques gouvernent des problèmes de calcul intégral dont l'énoncé n'implique pas de domaines de cette espèce.

La théorie des équations différentielles doit à Picard une méthode nouvelle et des plus fécondes pour démontrer l'existence des solutions. Cette méthode des approximations successives qui, dans le cas des équations différentielles ordinaires, remplace avantageusement la méthode dite de Cauchy-Lipschitz, consiste essentiellement à écrire les équations données, combinées avec les conditions initiales, sous forme d'équations intégrales de seconde espèce (linéaires ou non suivant que les équations différentielles le sont ou non elles-mêmes) où, sous les signes d'intégration, les inconnues sont, dans chaque approximation, remplacées par leurs valeurs déduites de l'approximation précédente. Cette méthode se montre d'une remarquable puissance*; son application ne se limite pas aux équations différentielles ordinaires (où elle a déjà été employée à deux sortes de problèmes), mais se montre d'une portée chaque jour plus générale. Avec son aide, Picard a résolu plusieurs importants problèmes concernant les équations aux derivées partielles et les équations fonctionnelles†.

* Sa souplesse a reçu une nouvelle extension dans les récents travaux de Hans Levy (1927–1929).

† Les solutions sont obtenues dans ces divers cas par approximations convergentes. Toutefois un fait des plus curieux signalé par Picard est que l'on peut tomber sur des approximations qui divergent et conduisent à deux fonctions limites différentes, l'une pour les approximations de rang pair, l'autre pour les approximations de rang impair.

En fait, il n'est pas de chapitre de la théorie des équations aux dérivées partielles qui ne lui doive des progrès essentiels. En ce qui regarde le cas elliptique, il fut le premier à étendre à des équations de ce type autres que l'équation ordinaire des potentiels la notion de la solution élémentaire, en construisant, pour toute équation de la forme $\Delta u = C(x, y)\, u$, une solution de la forme $v(x, y) \log(1/r) + w(x, y)$, où v et w désignent des fonctions régulières. Il s'est aussi attaqué à l'équation la plus générale (même non linéaire) de ce type et a obtenu pour de telles équations des conditions suffisantes pour que le problème de Dirichlet soit déterminé; il a aussi considéré au même point de vue le problème de Neumann relatif à la dérivée normale. Il put montrer que, dans certains cas très généraux dont le plus simple est $\Delta u - ku = 0$, la théorie se comportait plus simplement que pour l'équation ordinaire du potentiel, grâce à la présence d'un terme en u avec coefficient négatif. Il a également montré que toute équation linéaire du type elliptique à coefficients analytiques n'a que des solutions analytiques.

On doit mentionner tout spécialement ses recherches sur l'équation $\Delta u = e^u$, dont les applications sont très variées: non seulement elles intéressent la géomètrie et la physique mathématique, mais, considérées sur un surface fermée—plus précisément sur une surface de Riemann—elles fournissent le meilleur moyen de résoudre un problème fondamental de la théorie des fonctions fuchsiennes de Poincaré, permettant d'appliquer ces fonctions à l'équation différentielle la plus générale à coefficients algébriques.

Ceci n'est pas le seul cas où Picard a montré l'intérêt qui s'attache à l'étude d'équations aux dérivées partielles du type elliptique sur des surfaces fermées: les conditions aux limites disparaissent alors et la solution est entièrement déterminée, à un facteur constant près, par la seule condition d'être régulière sur toute la surface.

Mais parmi ces recherches sur le cas elliptique, la plus importante sans doute est une courte note des *Comptes Rendus* (1893) sous le titre "Sur l'équation aux dérivées partielles qui se présente dans la théorie de la vibration des membranes", note dont la portée n'est pas limitée à cette équation particulière, mais s'étend à tout le problème général des vibrations harmoniques. Cette question—la question principale de la physique mathématique depuis le XIXe siècle—était, à cette époque, loin d'être résolue. Cependant un premier pas essentiel avait été fait par Schwarz qui, dans un célèbre mémoire, apportant un beau complément aux recherches primitives de Liouville, avait déterminé la première période propre, celle de la "vibration fondamentale" ou vibration à fréquence minime. Picard réussit à étendre ce résultat en formant l'harmonique suivant. Un peu plus tard, Poincaré put donner à ce chapitre de la science sa conclusion en démontrant l'existence de tous les autres harmoniques. Ces mémorables recherches de Schwarz, Picard et Poincaré forment un tout. Avec le memoire de Poincaré sur "La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet", elles ont préparé l'avénement de la théorie des équations intégrales, qui fut traitée peu après (1900) par Fredholm et Hilbert, et a établi la physique mathématique moderne sur des bases solides. Dans ce grand résultat, Picard a eu sa part.

Il se rendit pleinement compte de l'importance de cette nouvelle théorie des équations intégrales et, dans les années suivantes, l'enrichit de plusieurs résultats importants. Il étudia plusieurs espèces d'équations de cette nature qui se comportent de manière singulière, c'est-à-dire pour lesquelles la méthode et les résultats de Fredholm ne subsistent plus: il montra, par exemple, que si l'intervalle d'intégration s'étend à l'infini, il peut arriver que la nature analytique de la solution dépende du choix du terme tout connu et cesse d'être une fonction méromorphe du paramètre qui multiplie le terme intégral. D'autre part, on lui doit l'étude d'un cas nouveau et intéressant, l'équation intégrale de troisième espèce, dans laquelle la fonction inconnue est, en dehors du signe d'intégration, multipliée par une fonction donnée de la variable indépendante, fonction susceptible de s'annuler dans l'intervalle d'intégration. Mais peut-être sa plus importante contribution à cette nouvelle branche des mathématiques concerne la difficile question de l'équation intégrale de première espèce, qui au premier abord se présente sous une forme plus simple que celle de Fredholm, mais dont, en fait, les propriétés sont beaucoup plus cachées. Picard réussit à indiquer des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution.

A la théorie des fonctions harmoniques, il apporta un complément d'une nature toute différente. Une remarque suggestive d'un jeune géométre, M. Noaillon, le condusit à rechercher ce qui peut être affirmé d'une telle fonction quand on sait qu'elle est de signe constant soit dans tout l'espace, soit au voisinage d'un point singulier.

Quittant maintenant le type elliptique pour le type hyperbolique, commençons par une remarque fondamentale sur la méthode de Riemann. Picard fut le premier à observer que cette méthode ne s'applique plus si, sur la courbe C qui porte les données, les deux coordonnées (l'équation différentielle étant rapportée à ses caractéristiques) ne sont pas chacune monotone: la quantité calculée par la formule de Riemann continue à vérifier l'équation aux partielles, mais non plus les conditions aux limites sur C.

En relation avec ce fait fondamental, il fut conduit à résoudre par sa méthode des approximations successives non seulement le problème de Cauchy tel que le traite la méthode de Riemann et celui, à peine distinct du premier, où les valeurs de l'inconnue sont données le long de deux caractéristiques sécantes, mais aussi le problème, de nature notablement plus difficile, qui se pose lorsque de telles valeurs sont données le long de deux lignes sécantes dont une seule est caractéristique: à de tels cas, la méthode des approximations successives s'applique sans aucune difficulté, grâce au fait que chacun d'eux peut être ramené à une équation intégrale du type de Volterra. Il n'est pas inutile de noter que la méthode ne se limite pas au cas où l'équation différentielle est linéaire.

Mais en ce qui regarde les équations linéaires hyperboliques à deux variables indépendantes, un résultat est particulièrement digne d'attention. Tandis que en général, les théories mathématiques sont de portée lointaine et ne trouvent leur application qu'après des siècles, sinon des millénaires, il offre un des cas bien rares où une notion mathématique nouvelle a immédiatement élucidé et aidé à gouverner un phénomène observé et jusque là inexpliqué. Il a transformé toute notre conception des ondes. Considerons par exemple les petites oscillations de l'air dans un tuyau cylindrique et supposons que primitivement, à l'origine des temps, le mouvement soit confiné à une petite tranche d'épaisseur ϵ. Comme il est bien connu, ce mouvement initial se propagarera dans les deux sens avec la vitesse v. Pour les anciens physiciens et jusqu'à une date toute récente, ceci semblait signifier de manière évidente qu'à n'importe quel instant ultérieur t, il n'y avait mouvement que dans deux petites tranches de la même épaisseur ϵ séparées de la première par un distance vt, aucune autre partie du tuyau, tant du delà de ces tranches qu'entre elles, ne montrant aucun effet de la perturbation primitive.

Une idée toute semblable était acceptée comme évidente dans la théorie des ondes sphériques, par exemple en ce qui concerne les perturbations primitivement confinées au voisinage d'un point, à l'intérieur d'une petite sphère de rayon ϵ. Pour des ondes se propageant avec la vitesse v, il semblait évident qu'après un intervalle de temps t, l'effet de ce mouvement initial devait intéresser uniquement une couche sphérique d'épaisseur ϵ, la couche comprise entre deux sphères concentriques à la première et de rayons respectifs vt, $vt+\epsilon$, à l'exclusion de tout effet aussi bien en dedans de la sphère intérieure qu'en dehors de la sphère extérieure. Fresnel lui-même, l'immortel fondateur de la théorie des ondes lumineuses, semble n'avoir jamais conçu le moindre doute sur ce point.

Or des perturbations électriques, telles que les produit par exemple un appareil télégraphique, se propagent aussi le long d'un fil supposé parfaitement homogène avec une vitesse constante v. Un signal émis à l'instant $t=0$ en un point déterminé du fil atteint un poste récepteur distant de d au bout d'un temps t_0 donné par $vt_0 = d$. A ce moment se produit naturellement l'effet utile: le signal est reçu au seconde poste, aucun effet ne se produisant *avant* l'instant t_0. Mais les ingénieurs ont constaté une circonstance tout à fait inattendue, qui est que, *après* cet effet utile, il en subsiste un autre—effet nuisible naturellement, puisque susceptible de brouiller les signaux suivants. Ce phénomène était complètement imprévu dans les idées jusque-là régnantes sur les ondes. Or Poincaré et Picard montrèrent tous deux qu'il y a là une conséquence logique et naturelle des propriétés de l'équation—"équation des télégraphistes"—qui régit la propagation. On doit ajouter que le théorie donnée par Picard de ce phenoméne était plus simple et plus claire: elle est déduite de la pure et simple application de la méthode de Riemann.

La théorie mathématique de cet effet nuisible a été d'un grand secours pour trouver les moyens pratiques de la supprimer ou d'en diminuer l'importance*. Mais en même temps que son utilité pratique, cette découverte est d'une grande importance théorique: le fait ainsi élucidé concerne non seulement les transmissions télégraphiques mais, de manière générale, tout phénomène régi par une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique. Il ne se présente pas, il est vrai, dans le cas ci-dessus mentionné des ondes sphériques ordinaires, et c'est évidemment pour cela qu'il n'a pas été pris en considération par Huygens ni Fresnel; mais ce cas est justement exceptionnel: on peut dire que toute autre équation aux dérivées partielles donne lieu à des perturbations qui ne disparaissent pas après le passage de l'onde†.

Les équations du type parabolique ne furent pas non plus négligées par Picard, qui en traita jusque dans ses dernières publications, étudiant en particulier l'effet de discontinuités de température.

Quelques résultats relatifs aux équations différentielles ordinaires sont indépendants de la méthode des approximations successives.

Bien que Picard ait substitué cette méthode à celle de Cauchy-Lipschitz, c'est lui qui a signalé un important avantage de cette dernière: la méthode

---

* Les conséquences qui apparaissent dans cet ordre d'idées ont été développées dans un cours important (malheureusement inédit) de Poincaré à l'École Supérieure des Télégraphes. Notons celle-ci, que l'effet des pertes le long de ligne peut être d'ameliorer la transmission.

† Un très habile géométre dont nous avons à deplorer la perte, M. Mathisson, a démontré que toute équation donnant lieu à des ondes "pures", c'est-à-dire telles qu'aucune perturbation résiduelle ne subsiste après le passage de l'onde, est réductible à l'équation ordinaire des ondes sphériques.

de Cauchy-Lipschitz a le plus grand domaine de convergence possible; les opérations convergent aussi loin que la solution elle-même existe.

D'autre part, Picard montre que tout système d'équations différentielles ordinaires définit un groupe à un paramètre. Cette proposition, réciproque du théorème fondamental de Lie, est, pour les équations différentielles ordinaires, la forme sous laquelle se présente le principe de Huygens.

Un dernier et très important résultat est d'un caractère formel. Picard a obtenu l'analogue de la méthode de Galois pour les équations différentielles linéaires ordinaires: à chaque équation de cette nature correspond un groupe dont les propriétés font connaitre ce qui peut et ce qui ne peut pas être employé efficacement pour l'intégration. C'est la théorie dite de Picard-Vessiot, à cause de la forme remarquablement complétée et simplifiée qui lui a été donnée par Vessiot.

Quelques années plus tard, comme il est bien connu, l'extension la plus complète des idées de Galois, entraînant la découverte de cas complètement insoupçonnés où divers problèmes classiques de géomètrie et de dynamique peuvent s'intéger, a été obtenue par Drach. Tandis que Picard, opérant sur les équations linéaires, a utilisé l'existence d'un système fondamental de solutions à l'aide desquelles toute autre solution peut être exprimée, Drach a pu passer au cas général en introduisant, au lieu de l'équation ou du système différentiel, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre correspondante, pour laquelle un tel système fondamental de solutions existe en toute hypothèse. On ne peut s'empêcher de penser que ces magistrales recherches de Drach ont été plus ou moins inspirées par la théorie de Picard, quoique personne, pas même sans doute Drach lui-même, ne puisse dire jusqu'à quel point cette influence s'est exercée.

Outre différents petits traités (publiés dans les *Cahiers scientifiques* de Julia) consacrés aux équations fonctionnelles ou aux dérivées partielles et contenant la plupart des découvertes dont nous venons de parler, Picard a publié son *Traité d'analyse* en trois volumes dont le but essentiel est la théorie des équations différentielles ordinaires, ouvrage fondamental, donnant un exposé complet de l'état de cette branche de la science au commencement du XXe siècle et dont l'étude approfondie reste impérieusement nécessaire à tout mathématicien.

Nous avons intentionnellement gardé pour la fin de cette énumération ce qui concerne la théorie des fonctions analytiques, quoique ce sujet ait été le premier qui ait été abordé par Picard après le travail géométrique qui fait l'objet de sa thèse. Le théorème ci-dessus mentionné sur les fonctions analytiques liées par une relation algébrique de genre supérieur à un appartient déja à cette catégorie. Il est à noter que ce théorème de

Picard semble en opposition avec le résultat fondamental de Poincaré concernant les courbes algébriques en général et qui précise pour ces courbes son célèbre théorème d'uniformisation des fonctions analytiques en donnant le moyen de trouver la variable auxiliaire à l'aide de laquelle les coordonnées d'une courbe algébrique donnée quelconque peuvent s'exprimer. Mais il n'y a aucune contradiction avec le résultat de Picard, car si le genre de la courbe est plus grand que un, les fonctions uniformes qui expriment x et y, savoir des fonctions fuchsiennes, n'ont pas des points singuliers isolés, mais des lignes singulières essentielles. En fait, les fonctions fuchsiennes sont introduites par Picard lui-même pour prouver le théorème en question.

Ce n'est pas le seul travail qu'ait inspiré à Picard la théorie des fonctions fuchsiennes. Il les a généralisées de deux façons différentes en définissant deux grandes classes de groupes discontinus de substitutions linéaires à deux variables qu'il a nommés groupes hyperfuchsiens et groupes hyperabéliens. Certains de ces groupes sont liés à la théorie arithmétique des formes quadratiques, plus spécialement des formes "hermitiennes" (formes à coefficients et à indéterminées conjugées); d'autres aux fonctions hypergéométriques de deux variables, de la même manière que certaines classes de fonctions fuchsiennes (les premières que Poincaré ait découvertes, ainsi qu'il le relate dans sa célèbre conférence sur l'invention mathématique) peuvent se déduire de l'étude de la série hypergéomètrique ordinaire de Gauss. La marche de ses théories montre une constante analogie avec l'analyse même de Poincaré et cette analogie subsiste sous la forme la plus générale qui puisse leur être donnée comme on s'en rend compte dans le bel exposé publié plus récemment par Georges Giraud.

D'autres transcendantes possédant des propriétés particulièrement intéressantes ont été découvertes par Picard—par exemple, les fonctions analytiques $f(z)$ qui, au lieu d'être doublement périodiques aux périodes ω et ω', vérifient les deux équations fonctionnelles

$$f(z+\omega) = f(z), \quad f(z+\omega') = S(z)f(z),$$

$S(z)$ étant une fonction doublement périodique donnée. Bien entendu, ce probléme n'est pas déterminé, puisque les deux équations précédentes ne changent pas si l'on multiplie $f(z)$ par n'importe quelle fonction uniforme elle-même doublement périodique.

Il fut conduit par ses études sur les surfaces algébriques et la généralisation des intégrales abéliennes à s'occuper des fonctions analytiques $2n$ fois périodiques de n variables et, tout d'abord, des conditions que doivent remplir les périodes elles-mêmes. Riemann avait déjà énoncé que les périodes d'une fonction méromorphe quadruplement périodiques de deux variables complexes ne peuvent pas être prises arbitrairement. Une démonstration de ce théorème fut publiée en abrégé en collaboration avec Poincaré, puis développée par Picard. Une circonstance surprenante est le rôle joué à cet égard par le caractère méromorphe de la question : Picard réussit en effet a construire une fonction quadruplement périodique de deux variables ayant des périodes arbitrairement choisies ; seulement une telle fonction a nécessairement des singularités essentielles. Ce sujet est en relation avec la théorie des fonctions abéliennes et Picard y revient dans les Leçons précèdemment citées sur *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*.

Mais la découverte de Picard qui a exercé la plus puissante influence sur le progrès de la Science mathématique dans ce dernier demi-siécle date de 1879 : c'est le célèbre théorème sur les fonctions entières d'après lequel une fonction entière $f(z)$ de la variable complexe z qui ne devient nulle part égale ni à zéro ni à un ne peut être qu'une simple constante, découverte qu'il compléta peu après (Octobre 1879) en démontrant que si chacune des équations $f(z) = a$ et $f(z) = b$ n'a qu'un nombre fini de solutions, $f(z)$ se réduit nécessairement à un polynôme.

Il fournit ces démonstrations à l'aide des fonctions modulaires elliptiques. Cette méthode indirecte donne l'étonnant résultat avec une merveilleuse simplicité. Pour le premier cas (celui où les équations $f(z) = a$ et $f(z) = b$ sont toutes deux dépourvues de solutions), il suffit de noter les deux propriétés classiques de la fonction modulaire : la première, qu'elle n'a d'autres singularités que 0, 1 et ∞ ; la seconde, qu'elle prend exclusivement des valeurs dont la partie imaginaire est positive.

La recherche de démonstrations directes est au contraire un problème qui semble pénétrer profondément dans la nature des fonctions entières et des fonctions analytiques. Depuis l'apparition du mémoire détaillé de Picard (1880), cette question attirante et quelque peu mystérieuse a préoccupé toutes les générations successives de mathématiciens. Il n'y a guère de jeune analyste qui n'ait exécuté ou au moins tenté d'exécuter des recherches sur ce sujet ; il est à peine exagéré de dire qu'il a indirectement et plus souvent encore directement inspiré et continue d'inspirer tout ce qui se fait de travaux sur les fonctions analytiques depuis ce moment.

Borel a réussi (1896) à démontrer, par une étude directe de la distribution des zéros, le théorème de Picard et, comme on le soupçonnait, un résultat quelque peu plus étendu*. Montel, Valiron, Julia, Milloux et d'autres

* Picard lui-meme (1924) a traité le cas où les seconds membres, au lieu d'être des constantes, seraient des polynômes ou des fonctions rationnelles.

ont déduit des conséquences générales, dont quelques unes très belles, sur la distribution des valeurs des fonctions entières.

Les fonctions entières ne sont pas les seules fonctions analytiques* qui relévent de ces idées de Picard. Lui-même a remarqué que la propriété s'étend à une fonction analytique uniforme au voisinage d'un point essentiel isolé: dans un tel voisinage, la fonction, à moins d'être une constante, ne peut admettre trois valeurs exceptionnelles (ceci donnant la conclusion primitive quand le point essentiel est rejeté à l'infini, l'une des valeurs exceptionnalles étant elle-même ∞). Des fonctions non uniformes ont été également considérées sous ce point de vue.

Des résultats d'une nature entièrement nouvelle, quoique toujours directement inspirés du théorème de Picard, ont été découverts par des hommes tels que Landau, Schottky et André Bloch. Au lieu de partir d'hypothèses relatives à la totalité du plan, ces auteurs considèrent une function $f(z)$ qu'ils supposent simplement définie et analytique dans l'intérieur d'un cercle déterminé C, par exemple le cercle qui a pour centre l'origine avec un rayon donné R, et se demandent quelles conséquences on peut déduire de l'hypothèse que, dans ce même cercle, $f(z)$ ne peut devenir égal ni à 0 ni à 1. Ces "interprétations finies du théorème de Picard" sont particulièrement remarquables par la forme précise qu'on peut leur donner: par exemple, moyennant des conditions simples imposées à f, la question peut être de trouver la valeur maxima précise pour le rayon d'un cercle à l'intérieur duquel cette fonction reste toujours différente de 0 et de 1. Comme il se trouve que les extréma en question correspondent à des fonction modulaires, la méthode primitive de démonstration de Picard apparaît comme moins artificielle qu'il ne pouvait être pensé à première vue, et plusieurs analystes contemporains sont portés à la considérer comme la méthode véritablement naturelle.

Mais des perspectives plus larges et plus suggestives encore, dans cet ordre d'idées, ont été révélées en Finlande par les travaux de Rolf Nevalinna et de son jeune successeur Ahlfors. Le principe essentiel de cette puissante extension des idées de Picard consiste à envisager non seulement des fonctions entières, mais aussi des fonctions méromorphes, de sorte que la valeur ∞ pour la fonction est admise aussi bien que n'importe quelle autre. Si l'on compare la manière dont la fonction se comporte vis à vis de n'importe laquelle de ces valeurs possibles, une curieuse compensation apparaît entre la tendance de la fonction à acquérir exactement cette

* Stoilof a même considéré, en se plaçant au point de vue topologique, des fonctions non analytiques. Au premier abord, on serait tenté de penser que le résultat de Stoilof pourrait fournir une méthode de démonstration du théoréme primitif; cependant il ne semble pas que ce soit le cas.

valeur a—le nombre de solutions de l'équation $f(z) = a$ dans le cercle de rayon R—et la tendance à approcher de cette valeur le long de la circonférence de ce cercle, de sorte qu'une certaine quantité $T(R)$, somme de deux termes dépendant respectivement de ces deux tendances, sera asymptotiquement indépendante de a. En second lieu se pose la question de savoir lequel de ces deux termes prévaudra. En général, ils seront en gros du même ordre; mais le contraire peut avoir lieu pour certaines valeurs exceptionnelles de a, cette circonstance étant caractérisée par un certain nombre, le "défaut" correspondant à a (pour a non exceptionnel, ce défaut est nul). Pendant que les valeurs exceptionnelles au sens primitifs de Picard sont en nombre au plus égal à 2 (en comptant la valeur $a = \infty$ qui ne figure pas explicitement dans l'énoncé de Picard), les valeurs exceptionnelles au nouveau point de vue peuvent être plus nombreuses, mais la somme des défauts ne peut pas être plus grande que 2, et ceci comprend le résultat de Picard comme cas particulier.

Cette théorie, l'une des plus profondes et des plus puissantes constructions connues en mathématiques, met splendidement en évidence la fécondité de la découverte de Picard, fécondité qui est certainement loin d'être encore épuisée.

Un trait frappant de la personnalité scientifique de Picard était la perfection de son enseignement, l'un des plus merveilleux, sinon le plus merveilleux, que j'aie connu. On pourrait en dire, en rappelant ce que Pascal aurait dit de ses proprés œuvres, qu' "il n'y avait pas un mot de trop ni un de manque". Ses leçons n'appartenaient pas à cette sorte d'enseignement qui est souvent très appréciée des débutants, mais que je suis porté à considérer comme beaucoup moins satisfaisante, où la clarté est obtenue par le fait que tout y semble également simple et facile, de sorte qui rien n'en reste au bout de peu de temps; au contraire, dans les leçons de Picard, la difficulté principale et essentielle apparaissait toujours en pleine lumière.

Cette qualité magistrale de son enseignement, à coté de la profondeur et de la portée étendue de ses découvertes, a été un élément important de l'influence de Picard sur les générations de jeunes mathématiciens, influence qui sera aussi durable qu'elle est profonde.