



ABŪ KĀMIL stellt unter Beweis, dass er keine Schwierigkeiten beim Rechnen mit Wurzeln hat. Mithilfe der geometrisch begründeten Beziehung  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a+b \pm 2 \cdot \sqrt{a \cdot b}}$  lassen sich Rechenaufgaben wie  $\sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{18+8+2 \cdot \sqrt{144}} = \sqrt{50}$  bearbeiten, die wir heute eher durch teilweises Wurzelziehen lösen:  $\sqrt{18} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ . Die Formel ist auch von praktischem Nutzen, wenn man beispielsweise wissen möchte, wieviel  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}$  bzw.  $\sqrt{5} + \sqrt{13}$  ungefähr ist:  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{65} \approx 8$ ,  $\sqrt{5} + \sqrt{13} \approx 6$ .

Zu den drei Typen gemischt-quadratischer Gleichungen gibt ABŪ KĀMIL nicht nur die Lösungsterme an, sondern auch jeweils das Quadrat der Lösung: Beispielsweise ergibt sich im Falle des Gleichungstyps  $x^2 + px = q$  der Term  $x^2 = \frac{p^2}{2} + q - \sqrt{p^2 q + (\frac{p^2}{2})^2}$ .

Unter den Aufgaben des Algebra-Buchs findet man wiederholt die Fragestellung, die Zahl 10 in zwei Summanden mit bestimmten Eigenschaften zu zerlegen. Während bei AL-KHWĀRIZMĪ rechts stets eine natürliche Zahl steht, scheut sich ABŪ KĀMIL nicht, dort eine irrationale Zahl zu setzen, wie das folgende Beispiel zeigt:

- Die Zahl 10 ist so in zwei Summanden  $x$  und  $10-x$  zu zerlegen, dass  $\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5}$ .

Multiplikation mit dem Hauptnenner und weitere Umformungen führen auf die quadratische Gleichung  $x^2 + \sqrt{50000} - 200 = 10x$  mit den Lösungen  $x = 5 \pm \sqrt{225 - \sqrt{50000}}$ . ABŪ KĀMIL präsentiert dann noch einen weiteren Lösungsweg: Der Ansatz  $y = \frac{10-x}{x}$  führt auf die quadratische Gleichung  $y^2 + 1 = \sqrt{5}y$  und somit zum Zwischenergebnis  $y = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$ . Um den irrationalen Koeffizienten  $\sqrt{\frac{5}{4}}$  in der linearen Gleichung  $10-x = (\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}) \cdot x$  zu eliminieren, werden beide Seiten der Gleichung quadriert, woraus sich die quadratische Gleichung  $x^2 + 10x = 100$  ergibt, aus der sich dann die Lösung  $x = \sqrt{125} - 5$  ergibt.

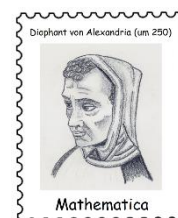
Trickreich sind auch ABŪ KĀMILS Umformungen bei der Aufgabe  $(\sqrt{\frac{x}{2}} + 3) \cdot (\sqrt{\frac{x}{3}} + 2) = 20$ , für die er die Lösung  $x = 15 + \sqrt{2400} - \sqrt{1449} + \sqrt{2160000}$  ermittelt.

Während im Buch AL-KHWĀRIZMĪS vierzig Aufgaben enthalten sind, umfasst ABŪ KĀMILS Werk insgesamt 69 Aufgaben - eine der letzten Aufgaben lautet wie folgt:

- Die Zahl 10 ist so in drei Summanden zu zerlegen, dass, wenn der kleine Teil mit sich selbst multipliziert zum mittleren Teil addiert wird, der ebenfalls mit sich selbst multipliziert wird, das Ergebnis der große Teil ist, mit sich selbst multipliziert. Wenn der kleine mit dem großen multipliziert wird, ist es gleich dem mittleren, mit sich selbst multipliziert.

Es geht hier also um die Lösung des Gleichungssystems  $x + y + z = 10$ ;  $x^2 + y^2 = z^2$ ;  $x \cdot z = y^2$  mit  $x < y < z$ . ABŪ KĀMILS verwendet zur Lösung die Methode des einfachen falschen Ansatzes (*regula falsi*), indem er zunächst  $x=1$  setzt, hieraus dann Werte für  $y$  und  $z$  herleitet und diese dann anschließend proportional korrigiert. Schließlich ergibt sich  $x = 5 - \sqrt{3125} - 50$  und  $z = 2\frac{1}{2} + \sqrt{31\frac{1}{4}} - \sqrt{781\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$  und hieraus ein Term für  $y$ .

In einem weiteren Werk, dem *Buch der Seltenheiten in der Rechenkunst* (*Kitāb tarāif fīl-hisāb*) beschäftigt sich ABŪ KĀMIL mit unterbestimmten linearen Gleichungssystemen mit ganzzahligen Lösungen. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass ABŪ KĀMIL das Buch verfasste, bevor eine arabische Übersetzung von DIOPHANTS *Arithmetica* erfolgt war; die von ihm verwendeten Methoden weichen von den Verfahren DIOPHANTS ab.



Die sechs Aufgaben des Buches werden als Aufgaben über Vögel formuliert. ABŪ KĀMIL zeigt die Vielfalt der Möglichkeiten hinsichtlich der Anzahl der Lösungen:

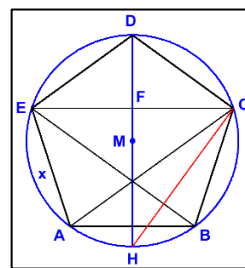
- Kaufe 100 Vögel für insgesamt 100 *dirham*: Eine Ente kostet 5 *dirham*, ein Huhn 1 *dirham*, 20 Sperlinge kosten zusammen 1 *dirham*. Zugehöriges Gleichungssystem:  $x + y + z = 100$ ;  $5x + \frac{1}{20}y + z = 100$ ; Lösung:  $x = 19$  Enten,  $z = 1$  Huhn,  $y = 80$  Sperlinge.
- Kaufe 100 Vögel für insgesamt 100 *dirham*: Eine Ente kostet 2 *dirham*, zwei Tauben bzw. drei Ringeltauben bzw. vier Lerchen bzw. ein Huhn kosten jeweils 1 *dirham*. Lösung: Das Gleichungssystem mit 5 Variablen hat insgesamt 2678 Lösungen, die mithilfe von Wertetabellen ermittelt werden können.
- Das Gleichungssystem  $x + y + z = 100$ ;  $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 100$  hat die folgenden sechs Lösungen: (51;10;39), (42;20;38), (33;30;37), (24;40;36), (15;50;35), (6;60;34).
- Das Gleichungssystem  $x + y + z = 100$ ;  $3x + \frac{1}{20}y + \frac{1}{3}z = 100$  hat keine Lösung.

ABŪ KĀMILS *Buch über das Fünfeck und das Zehneck* enthält zwanzig Aufgaben. Bei den ersten vier geht es um die Bestimmung eines regelmäßigen Fünf- bzw. Zehnecks bei vorgegebenem Durchmesser des In- bzw. des Umkreises.

*Beispiel:* Bestimmung der Seitenlänge eines einbeschriebenen regelmäßigen 5-Ecks mit Umkreisradius  $R = 5$ . Aus der Figur rechts ergibt sich:

$DC^2 = x^2 = DF \cdot DH = 10 \cdot DF$  (gemäß Kathetensatz für das Dreieck  $HCD$ ), also  $DF = \frac{x^2}{10}$ , sowie  $FC^2 = CD^2 - DF^2 = x^2 - \frac{x^4}{100}$  (gemäß Satz des PYTHAGORAS im Dreieck  $FCD$ ), also  $EC^2 = 4x^2 - \frac{1}{25}x^4$ . Weiter gilt im symmetrischen Trapez  $ABCE$  (gemäß Satz von PTOLEMÄUS:  $AC \cdot BE = AB \cdot CE + BC \cdot EA = x \cdot CE + x^2$ ).

Wegen  $EC = EB = AC$  folgt  $EC^2 = 4x^2 - \frac{1}{25}x^4 = x \cdot CE + x^2$  und somit  $EC = 3x - \frac{1}{25}x^3$ , also  $EC^2 = (3x - \frac{1}{25}x^3)^2$ . Zusammen mit  $EC^2 = 4x^2 - \frac{1}{25}x^4$  ergibt sich dann nach Umformungen die biquadratische Gleichung  $x^4 = 125x^2 + 3125$  mit der Lösung  $x = 5 \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{62,5 - \sqrt{781,25}}$ .



Weitere Aufgaben beschäftigen sich mit dem Zusammenhang zwischen den Radien von In- und Umkreis und Seitenlänge bei regelmäßigen Vielecken sowie mit der Bestimmung eines regelmäßigen 15-Ecks, vgl. Abb. vorne: Sind  $A, C$  Eckpunkte eines regelmäßigen 6-Ecks und  $B, C$  Eckpunkte eines regelmäßigen 10-Ecks, dann sind  $A, B$  Eckpunkte eines regelmäßigen 15-Ecks. Mithilfe des Satzes von PTOLEMÄUS, angewandt auf das Viereck  $ABCD$ , ergibt sich für  $R = 5$ :  $AB = \sqrt{15,625 + \sqrt{48,828125}} + \sqrt{4,6875 - \sqrt{23,4375}}$ .

Bei der Aufgabe, die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks zu bestimmen, bei dem die Summe aus Flächeninhalt und Höhe gleich 10 ist, verlässt ABU KAMIL die bisherige Tradition, nur Summen von gleichdimensionalen Größen zu betrachten – es geht hier offensichtlich nicht um einen Anwendungsbezug, sondern nur um eine eingekleidete arithmetische Aufgabenstellung.

Zu den erhaltenen Werken ABU KAMILS gehört schließlich noch das Buch *Über die Messkunst*. Da dieses Werk für Anwendungen im Alltag verfasst wurde, insbesondere für Handwerker und Landvermesser, findet man darin keine Herleitungen oder Beweise, sondern nur Formeln und Zahlenbeispiele für die Berechnung von Seiten, Flächeninhalten und Umfängen von einfachen geometrischen Figuren (Dreiecke, Vierecke, regelmäßige Vielecke, Kreis und Kreisteile) sowie von Oberflächen und Volumina verschiedener Körper.