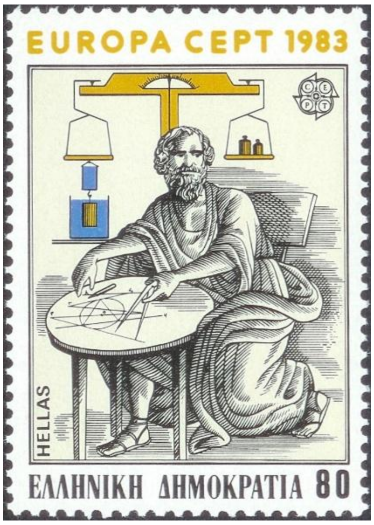
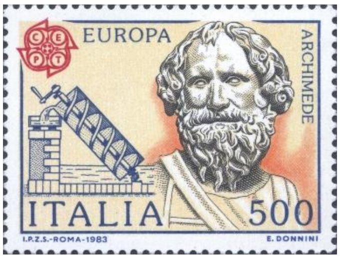
Juli 2007

Vor 2250 Jahren lebte ARCHIMEDES VON SYRAKUS (287 – 212 v. Chr.)



Archimedes gilt als der bedeutendste Mathematiker und Physiker des Altertums. Seine Schriften, die durch arabische Wissenschaftler auch in Europa wieder bekannt wurden, gaben Anregungen für Kepler, Newton, Leibniz und viele andere. Über sein Leben ist nur wenig bekannt: Archimedes wurde in Syrakus, einer griechischen Stadt auf Sizilien, geboren; sein Vater war Phidias, ein Astronom. Er studierte in Alexandria (Ägypten), dem damaligen Wissenschaftszentrum der hellenistischen Welt. Während des 2. Punischen Krieges kam er bei der Eroberung der Stadt Syrakus, die sich mit Karthago gegen Rom verbündet hatte, gewaltsam ums Leben. *„Noli turbare circulos meos“* („Störe meine Kreise nicht“) sollen seine letzten Worte gewesen sein.

Unter seinen Zeitgenossen wird Archimedes insbesondere durch seine Erfindungen berühmt: Er formuliert das Hebelgesetz und baut „einfache Maschinen“ wie den Flaschenzug oder die Archimedische Schraube, mit der man Wasser auf ein höheres Niveau befördern kann, erfindet aber auch Kriegsmaschinen für die Verteidigung der von den Römern über zwei Jahre belagerten Heimatstadt.

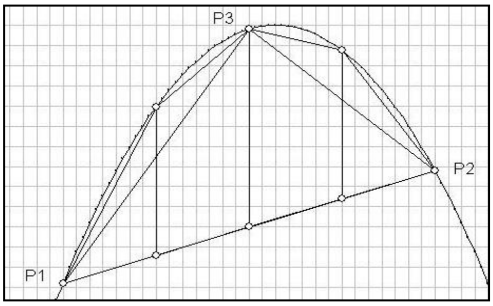


Ob Archimedes das Prinzip des Auftriebs tatsächlich beim Baden entdeckt hat, wie die Legende berichtet, mag dahingestellt sein; sein *Heureka* (Ich habe es gefunden) wird seitdem als geflügeltes Wort verwendet, wenn ein schwieriges Problem gelöst ist.

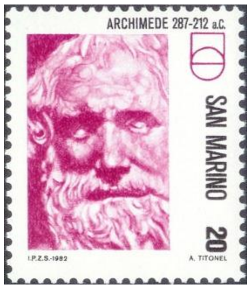
Das Phänomen *„Wird ein Körper in eine Flüssigkeit eingetaucht, dann erfährt er eine Auftriebskraft, die gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeitsmenge ist.“* trägt heute noch den Namen des Entdeckers (Archimedisches Prinzip).

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

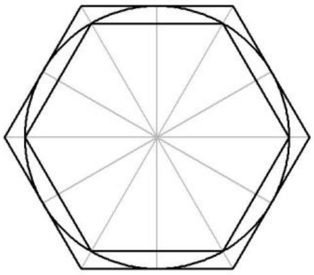
ARCHIMEDES verfasste zahlreiche Schriften, die nur teilweise erhalten sind; wahrhaft sensationell war daher der Fund eines Palimpsests (doppelt beschriebenes Dokument) im Jahr 1906; dieses enthielt Auszüge aus verschiedenen Werken, darunter die Berechnung des Flächeninhalts eines Parabelsegments, die Volumen- und Oberflächenberechnungen bei Kugel, Kegel, Zylinder, Ellipsoid, Rotationsparaboloid und von Segmenten dieser Körper sowie Schwerpunktbestimmungen bei diesen Körpern.
Bei vielen Herleitungen verwendet ARCHIMEDES das Hebelgesetz – ein Hinweis darauf, dass er zunächst Modelle dieser Körper mithilfe physikalischer Methoden (messen, wägen) untersucht und an ihnen Eigenschaften entdeckt, die er anschließend aber exakt beweist, so z. B., dass die Oberfläche einer Kugel genau viermal so groß ist wie die Fläche eines Großkreises. Stolz ist er auf die Entdeckung, dass das Volumen einer Kugel und das Volumen eines die Kugel einschließenden Zylinders im Verhältnis $2:3$ stehen; er lässt die beiden Körper auf seinem Grabstein darstellen, wie MARCUS TULLIUS CICERO im Jahr 75 v. Chr. berichtet.



Mit der Berechnung des Flächeninhalts eines Parabelsegments bereitet ARCHIMEDES die Integralrechnung des 17. Jahrhunderts vor: Ein Parabelsegment entsteht, indem eine Gerade durch zwei Parabelpunkte P_1 und P_2 gezeichnet wird; eine Parallele zur Symmetrieachse der Parabel durch den Mittelpunkt der Sehne schneidet die Parabel in P_3. Die Punkte P_1, P_2, P_3 bilden ein Dreieck. Analog zeichnen wir Dreiecke über den Sehnen P_1P_3 und P_2P_3. Das Verfahren kann beliebig oft fortgesetzt werden; durch die unendliche Folge von Dreiecken wird die Fläche des Parabelsegments ausgeschöpft (Exhaustionsverfahren). Aus den Eigenschaften von Parabeln folgt, dass das erste Dreieck $P_1P_2P_3$ genau viermal so groß ist wie die beiden im nächsten Schritt gebildeten Dreiecke zusammen genommen.
Der Flächeninhalt des Parabelsegments errechnet sich also als unendliche Summe; ARCHIMEDES gibt hierfür den Wert $\frac{4}{3}A$ an, wobei A der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ ist. Heute würden wir die Berechnung der unendlichen Summe so notieren:
$A+\frac{A}{4}+\frac{A}{4^2}+\frac{A}{4^3}+...=\frac{A}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}A$. ARCHIMEDES argumentiert wie folgt: Hat man eine Folge von Zahlen $A, B, C, ..., Z$, von denen jede viermal so groß ist wie die nachfolgende, dann gilt: $A+B+C+...+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}A$ (*). Zum Beweis rechnet er:

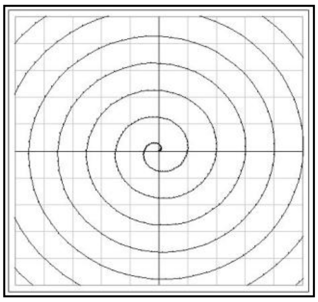


$B+C+...+Z+\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}C+...+\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}\cdot(B+C+...+Z)=\frac{1}{3}\cdot(A+B+C+...+Y)$.
Subtrahiert man auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}C+...+\frac{1}{3}Y$, dann ergibt sich $B+C+...+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{1}{3}A$ und hieraus Gleichung (*). Bemerkenswert erscheint die Erkenntnis des ARCHIMEDES, dass die Differenz zwischen dem Grenzwert der unendlichen Summe und einer beliebigen endlichen Teilsumme gerade gleich einem Drittel des letzten Summanden beträgt!
ARCHIMEDES entwickelt auch einen Algorithmus zur Berechnung von π: Die Idee, den Einheitskreis durch regelmäßige Vielecke ein- und umzubeschreiben, war bereits vor ihm bekannt. Durch den von ihm gewählten Übergang vom regelmäßigen n-Eck zum $2n$-Eck gelingt es ihm, den Wert von π einzuschachteln.

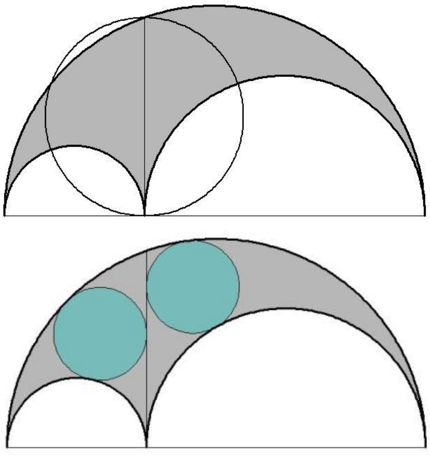


Mithilfe geometrischer Überlegungen findet er für den Umfang U_{2n} des umbeschriebenen bzw. u_{2n} des einbeschriebenen $2n$-Ecks heraus, dass $U_{2n} = \frac{2 \cdot U_n \cdot u_n}{U_n + u_n}$ (harmonisches Mittel) und $u_{2n} = \sqrt{U_{2n} \cdot u_n}$ (geometrisches Mittel). Beginnend mit einem regelmäßigen 6-Eck, also $u_6 = 6, U_6 = 4 \cdot \sqrt{3}$, rechnet er weiter bis zum regelmäßigen 96-Eck, wobei er die Quadratwurzeln durch geeignete Brüche approximiert. Dies führt schließlich zur Abschätzung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Wesentlich bei der Argumentation, dass man eine Fläche durch Ausschöpfung oder durch Überdeckung bestimmen kann, ist ein Grundsatz, der heute als *ARCHIMEDisches Axiom* bezeichnet wird: Zu je zwei Größen kann man ein Vielfaches der einen Größe bilden, sodass dieses größer ist als die andere Größe.

Als ARCHIMEDische Spirale bezeichnet man eine ebene Kurve, die entsteht, wenn sich ein Punkt auf einem vom Ursprung ausgehenden Strahl mit konstanter Geschwindigkeit *a* vom Ursprung fortbewegt und zugleich dieser Strahl sich mit konstanter Geschwindigkeit 1 um den Ursprung dreht. Die Punkte der Kurve lassen sich durch eine Parametergleichung mit der Variablen φ beschreiben: $(x; y) = (a \cdot \varphi \cdot \cos(\varphi); a \cdot \varphi \cdot \sin(\varphi))$.



ARCHIMEDES bestimmt den Inhalt der Fläche, die der Strahl nach einer Umdrehung überdeckt hat; sie ist gerade gleich einem Drittel des umschließenden Kreises.



ARCHIMEDES beschäftigt sich auch mit besonderen Kreisfiguren, den Arbelos (*Schustermesser*), und beweist, dass die Fläche eines Arbelos gerade so groß ist wie die eines Kreises, dessen Durchmesser durch die eingezeichnete „Höhe" gegeben ist. Bemerkenswert ist auch, dass die kleineren Halbkreis-Bögen eines Arbelos zusammen genauso lang sind wie der große Halbkreisbogen und dass die im Arbelos links und rechts von der „Höhe" gerade hineinpassenden Kreise genau gleich groß sind (*Zwillingskreise des ARCHIMEDES*).

Zu den arithmetischen Schriften des ARCHIMEDES gehört auch der „Sandrechner", in dem er das bis dahin übliche Zahlensystem über die Myriade ($=10^4$) hinaus erweitert; mithilfe dieser Darstellung gibt er einen Schätzwert für die Anzahl der Sandkörner an, mit der man eine Kugel von der Größe der Erde füllen könnte; die Größe des Weltalls schätzt er auf ein Volumen von (in unserer Schreibweise) 10^{64} Sandkörnern.

Schließlich beschäftigt sich ARCHIMEDES auch mit regelmäßigen Körpern; die 13 Körper, deren Oberfläche sich aus *verschiedenen* regelmäßigen Vielecken zusammensetzt, werden ihm zu Ehren als ARCHIMEDische Körper bezeichnet.

ARCHIMEDES-Gemälde von RIBERA und FETTI