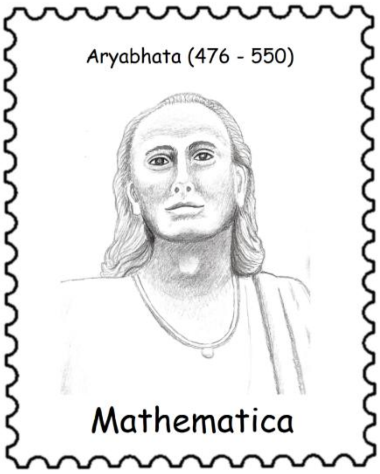
August 2014

Vor 1500 Jahren wirkte **ĀRYABHATA** (476 – 550)



Zeichnung © Andreas Strick 2014

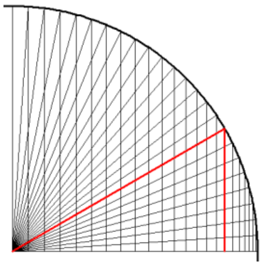
ĀRYABHATA ist der erste bedeutende indische Mathematiker und Astronom, dessen Name der Nachwelt überliefert ist. Um ihn von einem anderen Astronomen gleichen Namens zu unterscheiden, der im 10. oder 11. Jahrhundert lebte, wird er oft auch als ĀRYABHATA I. oder als ĀRYABHATA DER ÄLTERE bezeichnet. Es gibt Hinweise darauf, dass ĀRYABHATA in Kusumapura, in der Nähe des heutigen Patna (Bundesstaat Bihar), geboren wurde, der Hauptstadt des einst mächtigen Gupta-Reichs, das sich vom Punjab (heute Pakistan) bis zum Golf von Bengalen erstreckte, und dass er dort als Leiter der Universität und als Lehrer tätig war. Andere Quellen geben Ashmaka (Assaka) in Südindien als Geburtsregion an. – Welche Bedeutung ĀRYABHATA innerhalb der Wissenschaftsgeschichte Indiens einnimmt, wird aus der Tatsache deutlich, dass der erste indische Erdsatellit, der 1975 mithilfe einer sowjetischen Trägerrakete ins All transportiert wurde, den Namen des berühmten Wissenschaftlers trug.

ĀRYABHATA schrieb mindestens zwei Bücher, wobei die Existenz des einen der beiden Bücher nur durch Zitate später lebender Autoren gesichert ist. Das andere Werk, von der Nachwelt *Āryabhatīya* genannt, wurde im Jahr 499 verfasst, wie man aus im Werk enthaltenen Kalenderrechnungen schließen kann. Es gehörte mit zu den Schriften, die um 820 im *Haus der Weisheit* in Bagdad ins Arabische übersetzt wurden. MOHAMMED AL KHWARIZMI nahm in seiner *Algebra* Bezug auf dieses Buch.

Āryabhatīya ist in *Sanskrit* verfasst, der alt-indischen Sprache der Gelehrten und Ritualsprache der Schriften des Hinduismus, Buddhismus und Jainismus (vergleichbar der früheren Rolle des Lateinischen in Europa), für die PĀNINI im 4. Jahrhundert v. Chr. eine Grammatik erstellte, der ersten Grammatik in der Geschichte der Menschheit.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Āryabhatīya besteht aus 118 Versen, die sich mit Themen aus der Mathematik, der Astronomie und der Zeitrechnung beschäftigen. Die Schrift beginnt mit einer Lobpreisung *Brahmas*, dem Schöpfer der Erde und des Weltalls. Dann folgt eine Beschreibung des astronomischen Systems. ĀRYABHATA geht davon aus, dass sich die Erde täglich um sich selbst dreht, und erklärt so die Bewegung des Sternenhimmels. Ansonsten vertritt er ein geozentrisches Weltbild: Sonne, Mond und Planeten bewegen sich um die Erde; Abweichungen von der gleichförmigen Bewegung erklärt er durch unterschiedlich große Epizykel. Er bestimmt die Umlaufzeiten von Sonne, Mond und Planeten und berechnet hieraus, dass sich die gemeinsame Konjunktion dieser Himmelskörper alle 4,32 Millionen Jahre wiederholt. Ein Tag für Brahma dauert für Menschen 4,32 Milliarden Jahre. – Seine Erklärung von Mond- und Sonnenfinsternissen als natürliche Vorgänge ersetzt die überlieferten Vorstellungen, dass diese Finsternisse durch Dämonen verursacht werden.

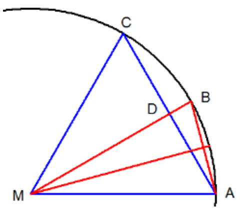


Der letzte Vers des ersten Teils enthält eine Liste mit 24 Zahlen. Es heißt dort: Die 24 Werte des Sinus lauten:

225, 224, 222, 219, 215, 210, 205, 199, 191, 183, 174, 164,
154, 143, 131, 119, 106, 93, 79, 65, 51, 37, 22, 7.

An späterer Stelle erklärt ĀRYABHATA dazu: Unterteilt man einen Viertelkreis mit Radius 3438 in 24 gleich große Sektoren, dann haben die den Winkeln von $3°45', 7°30', 11°15', 15°, ..., 90°$ gegenüberliegenden Höhen die Längen $225, 225+224=449, 449+222=671, 671+219=890, ..., 3438$. Der ungewöhnlich erscheinende Wert für den Radius erklärt sich so: Ein Vollwinkel umfasst $360° = 360 \cdot 60' = 21.600'$; der Umfang eines Kreises mit Radius 3438 LE. beträgt ziemlich genau 21.600 L.E., sodass jeder Bogenminute ein Bogen der Länge 1 LE. zugeordnet werden kann.

Im Unterschied zu den antiken griechischen Mathematikern tabelliert ĀRYABHATA also nicht die Länge der Sehnen, die einem Winkel gegenüberliegen, sondern als Erster die Längen der halben Sehnen. Er bezeichnet sie als *ardha-jya*, kurz: *jya*, woraus in der arabischen Übersetzung *jiba* wird, ein Wort ohne Bedeutung. Bei der Übersetzung der Toledodaner Tabellen des AL-ZARQALI ins Lateinische verwechselt GERHARD VON CREMONA *jiba* mit dem tatsächlich existierenden arabischen Wort *jaib*, was übersetzt *sinus* bedeutet.



Die Berechnung der einzelnen Tabellenwerte erfolgt ausgehend von $AD = \sin(30°) = \frac{1}{2}$; dann kann mithilfe des Satzes von PYTHAGORAS $MD = \cos(30°)$ berechnet werden sowie der *Sinus versus* des Winkels $BD = ver\sin(30°) = 1 - \cos(30°) = ... = 2 \cdot \sin(15°)$ und hieraus dann weiter der Wert von $\sin(15°)$ usw.

Der zweite Teil der *Āryabhatīya* enthält Abhandlungen (*siddhānta*) über Mathematik (*ganita*, von *gana* = zählen). Für die Darstellung von Zahlen verwendet ĀRYABHATA Kunstwörter, die er durch eine von ihm erfundene Verschlüsselung erhält: Für die Zahlen 1, 2, 3, …, 25 und 30, 40, 50, …, 100 verwendet er die $25+8=33$ Konsonanten des Sanskrit-Alphabets, ergänzt um die 9 Vokale, durch die sich ergibt, mit welchen Zehnerpotenzen die Zahlen multipliziert sind. Die Abfolge der Silben dieser Kunstwörter spielt in den Merkversen (*sūtras*) eine wichtige Rolle.

Mathematische Methoden und Lehrsätze wurden in Indien traditionell in dieser Form vermittelt. Die *sūtras* dienen als Gedankenstütze für das anzuwendende Verfahren und sollen von den Schülern auswendig gelernt werden. Für unbedarfte Leser erscheint daher der im 4. und 5. Vers beschriebene Algorithmus zum Ziehen der Quadrat- bzw. der Kubikwurzel aus einer Zahl im 10er-System zunächst unverständlich. Erst durch ein Beispiel wird er nachvollziehbar:

Dividiere immer die Nicht-Quadrat-Stelle durch zweimal die Quadratwurzel. Wenn dann das Quadrat von der Quadrat-Stelle subtrahiert ist, trage den Quotienten an der nächsten Stelle ein.

3	2	9	4	7	6	= (574)²
2	5	↓				subtrahiere 5²
	7	9				Wie oft passt (2 · 5) hinein? Antwort: 7
	7	0	↓			= 2 · 5 · 7
		9	4			
		4	9	↓		subtrahiere 7²
		4	5	7		Wie oft passt (2 · 57) hinein? Antwort: 4
		4	5	6	↓	= 2 · 57 · 4
				1	6	
				1	6	subtrahiere 4²
					0	

Offensichtlich beherrscht ĀRYABHATA die zugrunde liegende Formel

$(100a + 10b + 1c)^2 =$

$(100a)^2 + 2 \cdot (100a) \cdot (10b) + (10b)^2$

$+ 2 \cdot (100a + 10b) \cdot (1c) + (1c)^2$

Das Verfahren zum Ziehen der Kubikwurzel ergibt sich aus:

$(10a + 1b)^3 = (10a)^3 + 3 \cdot (10a)^2 \cdot (1b) + 3 \cdot (10a) \cdot (1b)^2 + (1b)^3$

Dividiere die zweite Nicht-Kubik-Stelle durch das Dreifache des Quadrats der Kubikwurzel. Das Quadrat multipliziert mit drei und dem vorher Erhaltenen muss von der ersten Nicht-Kubik-Stelle und die dritte Potenz von der Kubik-Stelle subtrahiert werden.

4	3	8	9	7	6	= (76)³
3	4	3	↓			subtrahiere 7³
	9	5	9			Wie oft passt (3 · 7²) hinein? Antwort: 6
	8	8	2	↓		= 3 · 7² · 6
		7	7	7		
		7	5	6	↓	= 3 · 7 · 6²
			2	1	6	
			2	1	6	subtrahiere 6³
					0	

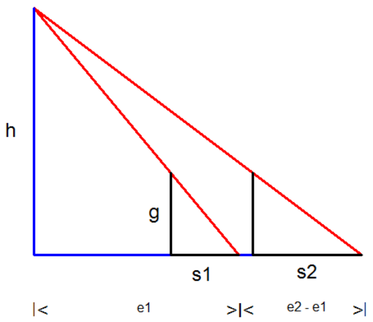
Hinweis: Bis zum 7. Jahrhundert sind die in Dezimalzahlen auftretenden Nullen an den Lücken in der Ziffernfolge erkennbar (*sūnya* (Sanskrit) = Leere, arabisch: *sifr*); erst danach werden die Lücken durch einen Punkt oder einen kleinen Kreis ersetzt, den Vorläufern der Ziffer „0".

In Vers 6 wird der Flächeninhalt eines Dreiecks als Produkt der halben Basis mit der Höhe angegeben und das Volumen eines Tetraeders („Sechskant") mit einer analog gebildeten Formel, aber fälschlicherweise als halbe Grundfläche mal Höhe. Vers 7 enthält die korrekte Formel für die Kreisfläche (*halber Umfang mal Radius*) und eine ziemlich ungenaue Näherungsformel für das Kugelvolumen (*Flächeninhalt eines Kreises mal Quadratwurzel aus dem Flächeninhalt*, d. h. $V \approx 1{,}77 \cdot \pi \cdot r^3$).

In Vers 9 gibt ĀRYABHATA ohne Begründung an, wie die Kreiszahl π berechnet werden kann: *Addiere* 4 *zu* 100, *multipliziere mit* 8 *und addiere dann* 62000. *Das Ergebnis ist ungefähr der Umfang eines Kreises mit Durchmesser* 20000.

Tatsächlich ist $\frac{62832}{20000} \approx 3{,}1416$ ein besserer Näherungswert für π als der vor ĀRYABHATA gewöhnlich benutzte Wert von $\sqrt{10} \approx 3{,}1623$, der auch in China bis zum 5. Jahrhundert verwendet wurde (z. B. von ZHANG HENG), bis ZU CHONGZHI aus Berechnungen an einem regulären 24576-Eck die Kreiszahl π auf sieben Dezimalstellen genau bestimmte – zur gleichen Zeit wie ĀRYABHATA, der „nur" ein reguläres 384-Eck betrachtete.

Die Verse 14 bis 16 beschäftigen sich mit Schattenlängen von Gnomonen (senkrecht in den Boden eingelassenen Stäben) und der Möglichkeit, mithilfe zweier gleichlanger, hintereinander stehender Stäbe der Länge g die Entfernungen e_1 bzw. e_2 und die Höhe h einer Lichtquelle zu bestimmen. Aus den Schattenlängen s_1 bzw. s_2 und dem Abstand $a = e_2 - e_1$ der Schattenspitzen ergibt sich:



$\frac{s_1}{e_1} = \frac{g}{h} = \frac{s_2}{e_2}$, also $s_1 = e_1 \cdot \frac{g}{h}$, $s_2 = e_2 \cdot \frac{g}{h}$, $s_2 - s_1 = a \cdot \frac{g}{h}$ und

schließlich $e_1 = a \cdot \frac{s_1}{s_2 - s_1}$, $e_2 = a \cdot \frac{s_2}{s_2 - s_1}$, $h = e_1 \cdot \frac{g}{s_1} = e_2 \cdot \frac{g}{s_2}$.

Die Verse 19 bis 22 enthalten verschiedene Regeln zu arithmetischen Folgen, außerdem Formeln für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, der ersten n Quadrat- bzw. Kubikzahlen sowie für die Summe der ersten n Dreieckszahlen:

$$(1) + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+3+\ldots+n) = \tfrac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \tfrac{1}{6} \cdot \left[(n+1)^3 - (n+1)\right]$$

Die Verse 23 bis 24 geben Regeln für Summen, Differenzen und Produkte von Zahlen an, die sich aus binomischen Formeln ergeben: *Das Produkt zweier Zahlen ist gleich der halben Differenz aus dem Quadrat der Summe und der Summe der Quadrate der beiden Zahlen*: $a \cdot b = \tfrac{1}{2} \cdot \left[(a+b)^2 - (a^2 + b^2)\right]$. – *Kennt man das Produkt* $a \cdot b$ *und die Differenz* $a - b$ *zweier Zahlen, dann kann man die Zahlen* a, b *wie folgt bestimmen*:

$a = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{4ab + (a-b)^2} + (a-b)\right)$ und $b = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{4ab + (a-b)^2} - (a-b)\right)$.

In den nächsten Versen wird erläutert, wie man mit Brüchen rechnet und wie Verhältnisgleichungen gelöst werden. Aus einer Aufgabe zur Zinsrechnung wird deutlich, dass auch das Lösen quadratischer Gleichungen bekannt ist, auch wenn dieses Thema nicht explizit angesprochen wird. – In Vers 31 untersucht er, wann sich zwei Objekte begegnen werden, deren Ort und Geschwindigkeit bekannt sind, bzw. wann sie sich in der Vergangenheit begegnet sind, wenn sie sich zurzeit voneinander entfernen. Diese Methode ist in der Astronomie wichtig, wenn es darum geht, Konjunktionen von Himmelskörpern zu bestimmen.

Die letzten beiden Verse des Abschnitts über mathematische Methoden widmet ĀRYABHATA dem Lösen von Kongruenzgleichungen, von ihm als *kuttaka* bezeichnet (wörtlich: Schleifmaschine, mit der etwas zerkleinert wird); wie beim euklidischen Algorithmus werden schrittweise die auftretenden Koeffizienten verkleinert.

Beispiel: Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, die bei Division durch 13 den Rest 4 lässt und bei Division durch 19 den Rest 7. Es gilt also: $n = 13a + 4 = 19b + 7$.

Nach a aufgelöst ergibt sich: $a = \frac{19b+3}{13} = 1b + \frac{6b+3}{13} = 1b + c$, hieraus dann weiter $b = \frac{13c-3}{6} = 2c + \frac{1c-3}{6} = 2c + d$, $c = \frac{6d+3}{1} = 6d + 3$. Setzt man für d die kleinstmögliche natürliche Zahl, also $d = 1$, ein, dann erhält man rückwärts gehend nacheinander: $c = 9$, $b = 2 \cdot 9 + 1 = 19$ und $a = 1 \cdot 19 + 9 = 28$ und somit $n = 13 \cdot 28 + 4 = 368 = 19 \cdot 19 + 7$.

ĀRYABHATAS Werk hatte erheblichen Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik, nicht nur in Indien. Um 630 verfasste BHASKARA I. hierzu einen umfangreichen Kommentar, und BRAHMAGUPTA, der zur selben Zeit lebte, setzte ĀRYABHATAS Arbeit fort.