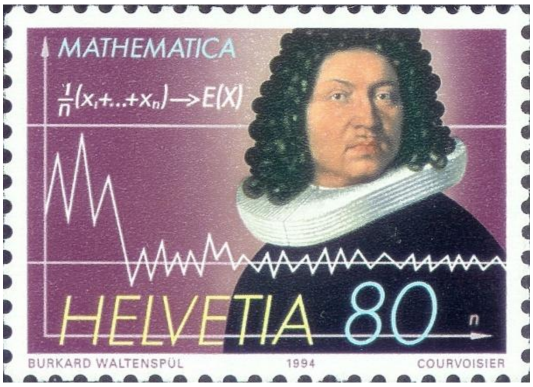
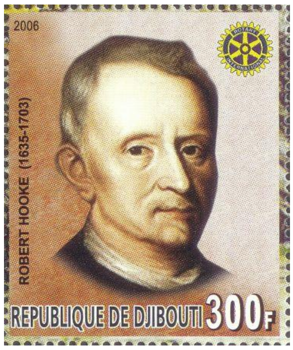
August 2010

Vor 305 Jahren starb **JAKOB BERNOULLI** (06.01.1655 – 16.08.1705)



Als HERZOG ALBA, der Statthalter des spanischen Königs PHILIPP II., im Jahr 1567 begann, den Aufstand der protestantischen Niederländer blutig niederzuschlagen, flohen viele aus ihrer Heimat, darunter auch die aus Antwerpen stammende Familie BERNOULLI. Schnell konnte der Gewürzhändler eine neue Existenz in Basel aufbauen; NICOLAUS BERNOULLI (1623 – 1708) wurde als einflussreicher Bürger in den Magistrat der Stadt gewählt. Aus seiner kinderreichen Ehe mit einer Bankierstochter gingen u. a. die beiden Söhne JAKOB (1655–1705) und JOHANN (1667–1748) hervor, die als Mathematiker und Physiker berühmt wurden. Weitere bedeutende Wissenschaftler der Familie waren JOHANN BERNOULLIS Sohn DANIEL (1700–1782), der als Mathematiker, Physiker und Mediziner zahlreiche Entdeckungen machte (Blutkreislauf, Impfung, medizinische Statistik, Strömungslehre), sowie der Neffe NIKOLAUS (1687–1759), der nacheinander Professuren für Mathematik, Logik und Jura innehatte.

JAKOB BERNOULLI, dem die Schweizer Postverwaltung 1994 die oben abgebildete Briefmarke widmete (allerdings ohne seinen Namen zu vermerken), studiert auf Wunsch seiner Eltern Philosophie und Theologie; heimlich besucht er jedoch auch Vorlesungen in Mathematik und Astronomie. Nach Abschluss seiner Studien zieht er – im Alter von 21 Jahren – als Privatlehrer durch Europa; dabei macht er Bekanntschaft mit den bedeutendsten Mathematikern und Naturforschern seiner Zeit, u. a. mit ROBERT BOYLE (1627– 1691) und mit ROBERT HOOKE (1635–1703).



Sieben Jahre später kehrt er wieder nach Basel zurück und übernimmt einen Lehrauftrag für Experimentalphysik an der Universität.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Mit 32 Jahren übernimmt der ausgebildete Theologe Jakob Bernoulli einen Lehrstuhl für Mathematik – dem Fach, dem er sich von nun an vollständig widmet. Auch seinen 13 Jahre jüngeren Bruder Johann, der nach dem Wunsch der Eltern Medizin studiert, kann er für die Beschäftigung mit mathematischen Fragen begeistern.

Jakob Bernoulli wendet das Induktionsprinzip als Beweismethode an und benutzt bei Reihenuntersuchungen die Ungleichung, die heute als *Bernoullische Ungleichung* bezeichnet wird: Für $x > -1, x \neq 0$ gilt: $(1+x)^n > 1 + n \cdot x$.

Er beschäftigt sich mit unendlichen Reihen, beweist, dass die harmonische Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...$ über alle Schranken hinaus wächst und dass die Summe der Kehrwerte der Quadratzahlen beschränkt ist: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+... < 2$, die Folge also konvergiert. Erst Leonhard Euler (1707–1783), der durch Vorlesungen bei Johann Bernoulli zur Mathematik geführt wird, gelingt der Beweis, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$.

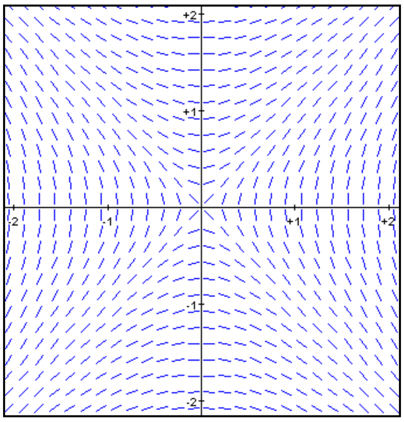
Auch wenn er zunächst einige Schwierigkeiten mit den Theorien von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) hat, wendet er den Differentialrechnungskalkül erfolgreich an und veröffentlicht Abhandlungen zu Tangenten- und Flächenberechnungen.

1690 gelingt es ihm, ein von Leibniz aufgeworfenes geometrisches Problem mithilfe der Differentialrechnung zu lösen:

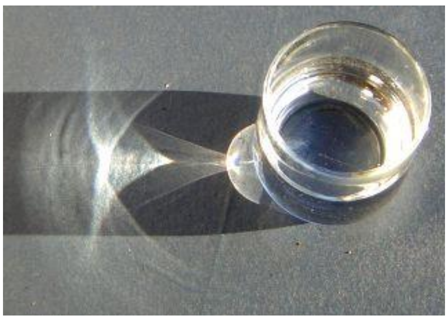
Längs welcher Kurve bewegt sich ein Körper, der mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fällt (sog. Isochrone)?

In der Abhandlung spricht er als Erster vom *calculus integralis;* den Begriff des „Integrals" übernimmt Leibniz dann in seine Schriften.

Aus physikalischen Bedingungen ergeben sich manchmal sog. *Differentialgleichungen*, die sich mithilfe der Methode der *Trennung der Variablen* (eine Idee von Jakob B.) lösen lassen. Beispielsweise führt die Beziehung $y' = \frac{x}{y}$ zwischen den Variablen x, y und deren Ableitung y' nach Umformung und Integration zu $yy' = x$ und $\int y\,dy = \int x\,dx$, also $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$, d. h. $y^2 - x^2 = 2C$. Durch diese Gleichung lassen sich Hyperbeln beschreiben – in der Abbildung ist das zugehörige Richtungsfeld der Differentialgleichung (eine Idee von Johann B.) zu sehen: In den Punkten des Koordinatensystems werden Tangenten, deren Steigung man aus der Differentialgleichung berechnen kann, andeutungsweise gezeichnet.

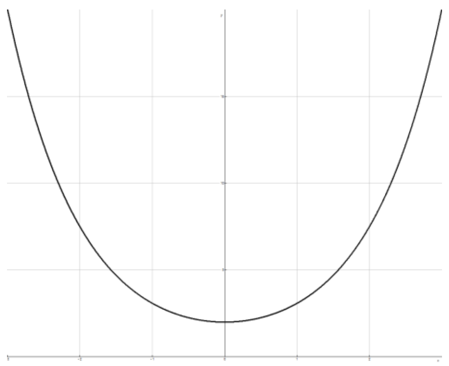
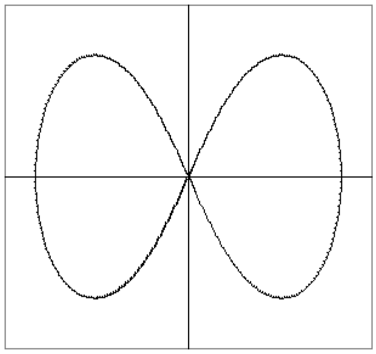
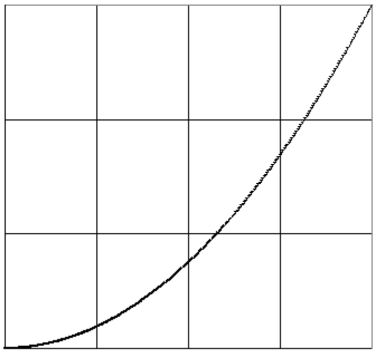


Gemeinsam untersuchen sie Kaustiken (Einhüllende von reflektierten Strahlen) und leiten in diesem Zusammenhang eine Formel für den Krümmungskreis einer Kurve her; bei einer differenzierbaren Funktion berechnet sich deren Radius r wie folgt: $r = \frac{\left(1+f'(a)^2\right)^{3/2}}{f''(a)}$.



(Abb. Wikipedia)

Weitere Arbeiten stellen unter Beweis, dass JAKOB BERNOULLI den neuen Kalkül anzuwenden weiß:

		
Kettenlinie	Lemniskate	Brachistochrone

- *Welche Linie nimmt eine an zwei gleich hoch liegenden Punkten aufgehängte Kette ein?* Lösung: „Kettenlinie": $f(x) = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$
- *Welches ist der geometrische Ort aller Punkte, bei denen das Produkt der Abstände zu zwei festen Punkten konstant ist?* Lösung: „Lemniskate": $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
- *Durch welche Kurve müssen zwei auf unterschiedlicher Höhe liegende Punkte miteinander verbunden werden, damit eine reibungsfrei gleitende Masse in kürzester Zeit beim unteren Punkt ankommt?* Die sog. *Brachistochrone* wird auch von NEWTON, LEIBNIZ und L'HOSPITAL als Lösung der Frage gefunden.

Die Brüder tragen gemeinsam wesentlich zur Verbreitung und zur Entwicklung der Infinitesimalrechnung bei. Zunächst sind es nur Empfindlichkeiten und Eifersüchteleien, die die Zusammenarbeit untereinander erschweren – im Laufe der Jahre entwickelt sich hieraus ein unversöhnlicher Hass, der den anderen Wissenschaftlern nicht verborgen bleibt. Der ehrgeizige JOHANN BERNOULLI verlässt Basel und nimmt eine Mathematik-Professur in Groningen an; erst nach dem Tod seines Bruders kehrt er nach Basel zurück und wird dort dessen Lehrstuhl-Nachfolger. Im 1713 ausbrechenden Prioritätenstreit zwischen LEIBNIZ und NEWTON, wer der „Erfinder" der Differentialrechnung sei, schlägt sich JOHANN BERNOULLI auf die Seite von LEIBNIZ.

Aus einem Briefwechsel JAKOB BERNOULLIS mit CHRISTIAAN HUYGENS (1629–1695) über Glücksspiele entsteht eine erste umfassende Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung; die *Ars conjectandi* (Kunst des Vermutens) wird von seinem Neffen NIKOLAUS 1713 posthum herausgegeben. JAKOB BERNOULLIS Werk verallgemeinert die Erkenntnisse, die HUYGENS in *De ratiociniis in ludo aleae* (Über Berechnungen bei Glücksspielen) im Jahr 1657 zusammengestellt hat; insbesondere setzt er sich systematisch mit kombinatorischen Fragestellungen auseinander und zeigt, wie man die Lösungen auf Glücksspiele anwendet.

Der letzte Abschnitt enthält das „goldene Theorem", das seit SIMEON DENIS POISSON auch als *BERNOULLIsches Gesetz der großen Zahlen* bezeichnet wird:

Ein Zufallsversuch werde n-mal unter gleichen Bedingungen wiederholt, die Ergebnisse sollen unabhängig vom Ergebnis der vorhergehenden Versuchsdurchführungen eintreten (sogenannte BERNOULLI-Versuche). Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmtes Ereignis A („Erfolg") bei jeder der Versuchsdurchführungen eintritt, sei mit p bezeichnet; dann gilt für die Wahrscheinlichkeit für $X = k$ Erfolge:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{(BERNOULLIsche Formel)}$$

Mit wachsender Anzahl der Versuche strebt die relative Häufigkeit $\frac{X}{n}$ stochastisch gegen die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses, d. h., für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{X}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1$ (BERNOULLIsches Gesetz der großen Zahlen)

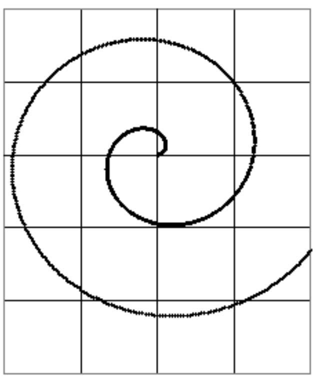
Das *BERNOULLIsche Gesetz der großen Zahlen* ist auf der Schweizer Briefmarke in der allgemeineren Form $\frac{1}{n} \cdot (x_1 + ... + x_n) \to E(X)$ notiert und grafisch veranschaulicht: Die Folge der arithmetischen Mittel der Versuchsergebnisse $x_1, x_2, ..., x_n$ strebt gegen den Erwartungswert $E(X)$ der zugehörigen Zufallsgröße.

Bei Untersuchungen über Potenzsummen stößt JAKOB BERNOULLI auf besondere Zahlen, die später als *BERNOULLI-Zahlen B_n* bezeichnet werden. Diese treten bei der Reihenentwicklung von $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ an der Stelle 0 auf. Die Funktion und ihre Ableitungen sind an der Stelle 0 nicht definiert, dort aber stetig fortsetzbar, und es gilt: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot \frac{x^n}{n!}$

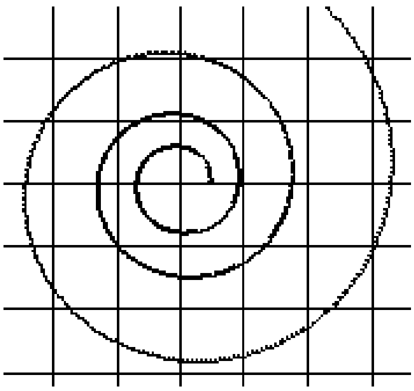
mit $B_0 = 1; B_1 = -\frac{1}{2}; B_2 = \frac{1}{6}; B_3 = 0; B_4 = -\frac{1}{30}; B_5 = 0; B_6 = \frac{1}{42}; B_7 = 0; B_8 = -\frac{1}{30}; B_9 = 0; B_{10} = \frac{5}{66}; ...$

Für die BERNOULLI-Zahlen gilt für $n > 1$ die Beziehung: $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot B_k = 0$. Auch bei den Reihenentwicklungen von $\tan(x)$, $\ln(\frac{\sin(x)}{x})$ und $x \cdot \cot(x)$ spielen sie eine Rolle.

Bei der Lösung der Frage *„Bei welcher Kurve wird jeder vom Ursprung ausgehende Strahl unter dem gleichen Winkel geschnitten?"* entdeckt JAKOB BERNOULLI die *Logarithmische Spirale*. Er ist von den Eigenschaften der *spira mirabilis* – auch nach zentrischer Streckung ergibt sich wieder eine Spirale dieses Typs - so begeistert, dass er sich die Kurve und den Spruch *Resurgo eadem mutata* (Verwandelt kehr' ich als dieselbe wieder) für seinen Grabstein wünscht, allerdings meißelt der Steinmetz in Unkenntnis des Unterschieds eine ARCHIMEDische Spirale.



ARCHIMEDische Spirale



Logarithmische Spirale

Heinz Klaus Strick Leverkusen 2010