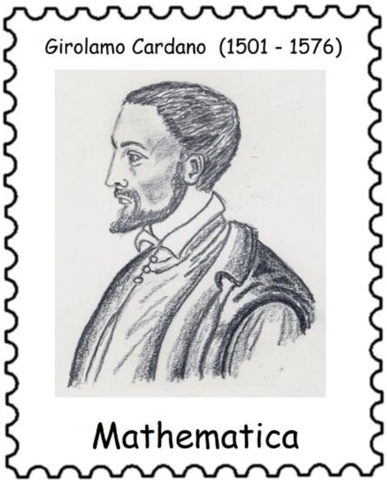
September 2012

Vor 450 Jahren wirkte **GIROLAMO CARDANO** (24.09.1501 – 21.09.1576)



Zeichnung © Andreas Strick 2012

Sein Name ist verbunden mit einer der heftigsten Auseinandersetzungen in der Geschichte der Mathematik. Stammt die CARDANische Formel tatsächlich von CARDANO selbst? Oder bediente er sich des geistigen Eigentums von TARTAGLIA?

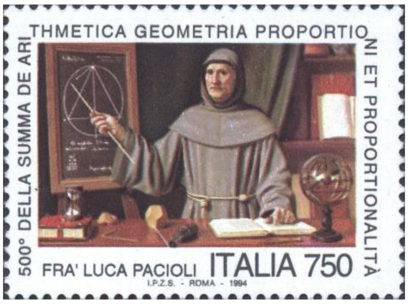
GIROLAMO (auch GERONIMO/HIERONIMO) CARDANO wird als uneheliches Kind eines Rechtsanwalts in Mailand geboren. Der Vater ist als Dozent an der Universität in Pavia tätig; außerdem lehrt er Geometrie an der angesehenen *Scuole Piatti* in Mailand. Vom Vater in Mathematik unterrichtet, plant der Heranwachsende eine akademische Laufbahn, entscheidet sich jedoch mit 19 Jahren für ein Studium der Medizin, das er in Pavia beginnt und – wegen des Kriegs zwischen Habsburg und Frankreich um die Vorherrschaft in Oberitalien – in Padua fortsetzt.

Nach dem Tod des Vaters hat der hochbegabte Student das geerbte Vermögen schnell vergeudet; sein weiteres Studium finanziert er durch Karten- und Würfelspiele. Dabei beschäftigt er sich u. a. mit den Chancen, die man beim zwei- und dreifachen Würfeln hat, eine bestimmte Augensumme zu erhalten, wenn bereits einmal gewürfelt worden ist. Diese ersten Erkenntnisse (verbunden mit Ratschlägen zum taktischen Verhalten) fasst er ab 1524 in einem Buch zusammen. *Das Buch vom Würfelspiel* (*Liber de Ludo Aleae*) enthält bereits Ansätze wie beim LAPLACE'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff sowie korrekte Rechenregeln zur Addition und Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten. CARDANO ist allerdings nicht an einer Veröffentlichung interessiert – er möchte seinen Informationsvorsprung möglichst lange ausnutzen.

Er bewirbt sich erfolgreich um die Stelle des Rektors der Universität Padua und erhält in Medizin einen Doktorgrad. Sein Versuch, sich als Arzt in Mailand niederzulassen, wird von den ortsansässigen Ärzten mit dem Hinweis auf die illegitime Herkunft verweigert. Allerdings ist dies nur ein Vorwand: Man fürchtet vor allem Auseinandersetzungen mit dem eigenwilligen, kompromisslosen und oft aggressiven Menschen.

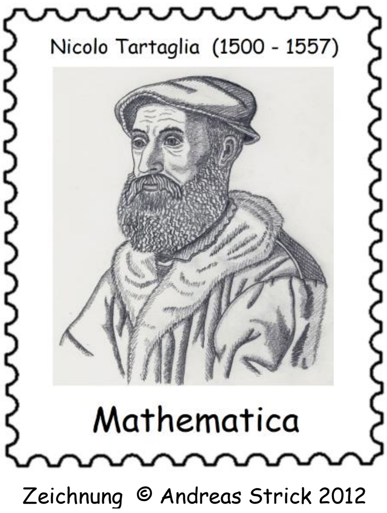
MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

So lässt sich CARDANO als Arzt in einem Dorf in der Nähe von Padua nieder, kann jedoch seine junge Familie von den Einkünften kaum ernähren. Nach einer Pechsträhne im Glücksspiel muss er die Möbel und den Schmuck seiner Frau verkaufen und zieht vorübergehend ins Armenhaus. Er ist froh, als ihm eine Stelle als Mathematiklehrer an der *Scuole Piatti* angeboten wird, an der auch einst sein Vater lehrte. Nunmehr in Mailand lebend, behandelt er dort heimlich kranke Menschen. Dabei ist er so erfolgreich, dass schließlich sogar ortsansässige Ärzte ihn um Rat fragen. Seine Chancen, als Arzt offiziell zugelassen zu werden, verscherzt er sich durch die Veröffentlichung eines Buches im Jahr 1536, in dem er die Qualifikation und charakterliche Eignung der Mailänder Ärzte in Frage stellt. In der Zwischenzeit ist jedoch die Zahl der Bewunderer seiner Fähigkeiten als Arzt so groß geworden, dass man ihm 1539 schließlich doch die Zulassung für Mailand erteilt. Als Begründung wird angegeben, dass sein Vater die Mutter später noch geheiratet habe und dadurch seine Geburt nachträglich legitimiert worden sei.



Im selben Jahr veröffentlicht CARDANO zwei Mathematikbücher, darunter *Practica arithmetice et mensurandi singularis*, in der er eine andere, allerdings ebenfalls falsche Lösung für das Teilungsproblem des LUCA PACIOLI angibt (*Wie ist der Einsatz zweier Spieler gerecht aufzuteilen, wenn ein Spiel vorzeitig abgebrochen werden muss und nicht fortgesetzt werden kann?*)

Das Jahr 1539 ist auch das Jahr, in dem CARDANO Kontakt zu TARTAGLIA aufnimmt …



Zeichnung © Andreas Strick 2012

NICOLO FONTANA ist Sohn eines reitenden Boten, der Post von Brescia (Republik Venedig) aus in benachbarte Städte befördert. Als er Opfer eines Raubmordes wird, verarmt die Familie, und die Witwe hat große Schwierigkeiten, ihre drei Kinder zu ernähren. Im Jahr 1512 erobern französische Truppen die Stadt und nehmen Rache für eine zuvor erlittene Niederlage. Über 40.000 Einwohner der Stadt werden wahllos umgebracht. NICOLO nimmt Zuflucht in der Kathedrale und entgeht auch dort nicht dem Gemetzel; er überlebt schwer verletzt. Sein Gesicht ist durch tiefe Wunden entstellt; als Erwachsener versucht er, die Narben durch einen mächtigen Bart zu verdecken. Seit dem furchtbaren Erlebnis stottert er; von seinen Nachbarn wird er TARTAGLIA genannt, d. h. *Stotterer* – er nimmt diesen Namen als Rufnamen an. NICOLO fällt wegen seiner Begabung für Mathematik auf, und seine Mutter findet jemanden, der bereit ist, ihn zu fördern. Bald schon gibt er selbst Mathematik-Unterricht, zunächst für Eingangsklassen, später in Verona und Venedig auch für ältere Schüler.

TARTAGLIA beschäftigt sich mit kubischen Gleichungen, für die bis dahin noch keine Lösungsmethode gefunden worden war. LUCA PACIOLI hatte sie allgemein für unlösbar („*impossibile*“) gehalten. Zu Beginn des 16. Jahrhunderts werden Gleichungen noch in Worten formuliert, und da das Rechnen mit negativen Zahlen noch nicht entwickelt ist, sind die Koeffizienten grundsätzlich positive Zahlen. Daher müssen Lösungsverfahren für 13 verschiedene Gleichungstypen gefunden werden.

Sieben Gleichungstypen enthalten alle Potenzen: $x^3+ax^2+bx+c=0$; $x^3+bx+c=ax^2$; $x^3+ax^2+c=bx$; $x^3+ax^2+bx=c$; $x^3+c=ax^2+bx$; $x^3+bx=ax^2+c$; $x^3+ax^2=bx+c$; und bei sechs Typen fehlt jeweils ein Glied: $x^3+bx+c=0$; $x^3+c=bx$; $x^3+bx=c$ sowie $x^3+ax^2+c=0$; $x^3+c=ax^2$; $x^3+ax^2=c$.

SCIPIONE DEL FERRO (1465–1526), Dozent an der Universität von Bologna, gelingt es um 1515, ein Verfahren zu entwickeln, das zu einer Lösung im Fall $x^3+bx=c$ führt. Er veröffentlicht dies jedoch nicht, vertraut das Verfahren aber u. a. einem seiner Schüler, ANTONIO FIOR, an. Um die Öffentlichkeit auf sich aufmerksam zu machen, verbreitet FIOR, dass er in der Lage sei, kubische Gleichungen zu lösen, und fordert – wie es damals üblich ist – andere Mathematiker zum öffentlichen Wettstreit heraus.

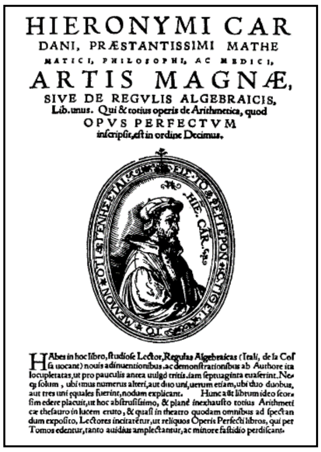
Zu Beginn des Jahres 1535 nimmt TARTAGLIA die Herausforderung an, denn in der Zwischenzeit hat er herausgefunden, wie man Gleichungen des Typs $x^3+ax^2=c$ lösen kann. Jeder der Kontrahenten stellt dem Gegner dreißig Aufgaben, die dieser innerhalb einer Frist von vierzig Tagen lösen soll. Während TARTAGLIA Probleme mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad stellt, sind alle Aufgaben von FIOR vom Typ $x^3+bx=c$, beispielsweise lautet das erste Problem: *Finde mir eine Zahl derart, dass, wenn ihr Kubus addiert wird, das Resultat* 6 *ist.* (Hier ist also die Gleichung $x^3+x=6$ zu lösen). Erst in der letzten Nacht vor Ablauf der Frist findet TARTAGLIA das Lösungsverfahren. FIOR hingegen erweist sich als mittelmäßiger Mathematiker, der sich darauf verlassen hat, dass sein Gegner kubische Gleichungen nicht lösen kann.

Großzügig verzichtet TARTAGLIA auf den für den Wettstreit ausgesetzten Preis; für ihn ist der Ruhm wichtig, der, wie er hofft, zu einer Beschäftigung führen wird, die sicherer und angesehener ist als die bisherige.

CARDANO, der bis dahin der Meinung PACIOLIS vertraut hatte, dass kubische Gleichungen nicht lösbar sind, hört von dem Wettstreit. Über einen Buchhändler lässt er bei TARTAGLIA nachfragen, ob er die von ihm gefundene Methode für ein Buch über Algebra zur Verfügung stellen könne, das in Vorbereitung sei. Dieser lässt ihm ausrichten, dass er die von ihm gefundenen Verfahren in einem eigenen Buch veröffentlichen werde. CARDANO drängt nun persönlich auf die Mitteilung der Methode, deutet an, dass er seine guten Kontakte zum Gouverneur von Mailand nutzen könne, um für ihn endlich eine angemessene Anstellung zu finden. Jetzt ist TARTAGLIA bereit, sein Geheimnis preiszugeben, lässt aber CARDANO schwören, dass er die Methode für sich behalten und nicht veröffentlichen werde. Noch auf der Heimreise bereut TARTAGLIA, was er getan hat, ist aber dann beruhigt, als seine Methode in keinem der im selben Jahr erscheinenden Mathematikbücher CARDANOS vorkommt.

TARTAGLIA teilt CARDANO die von ihm in der entscheidenden Nacht gefundene Methode in Versform mit. Demnach findet man die Lösung einer Gleichung $x^3+bx=c$ durch folgende Schritte: *Suche zwei Zahlen* u *und* v*, deren Differenz* c *ergibt und deren Produkt gleich dem Kubus von* $b/3$ *ist, dann ist* $\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$ *die gesuchte Lösung.* CARDANO genügen die Informationen von TARTAGLIA, um nunmehr Methoden zur Lösung *aller* Typen von kubischen Gleichungen zu entwickeln. Seinem Schüler LODOVICO FERRARI gelingt es sogar, mit ähnlichen Ansätzen Gleichungen 4. Grades zu lösen.

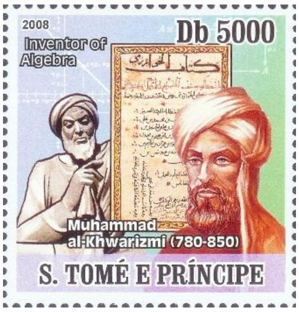
1543 erfahren die beiden vom Schwiegersohn DEL FERROS, dass DEL FERRO bereits 1515 einen ersten Typ von kubischen Gleichungen hat lösen können und TARTAGLIA somit nicht der Erste war, der dazu in der Lage war.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgo tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni equales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & plané inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Im Jahr 1545 erscheint in Nürnberg CARDANOs Hauptwerk: *Ars magna (Ars magnae sive de Regulis Algebraicis).* In 40 Kapiteln wird dargestellt, wie man die verschiedenen Typen von Gleichungen 3. und 4. Grades lösen kann. Ausdrücklich werden DEL FERRO und TARTAGLIA sowie FERRARI als Entdecker der Lösungen bestimmter Gleichungstypen genannt.

Für die Lösung der Gleichung vom Typ $x^3 + bx = c$ nutzt CARDANO eine Identität, die er analog zu AL-KHWARIZMIs Zerlegung von Quadraten durch Zerlegen eines Würfels beweist:
$(r-s)^3 = r^3 - 3r^2s + 3rs^2 - s^3$ also $r^3 - s^3 = (r-s)^3 + 3rs(r-s)$.



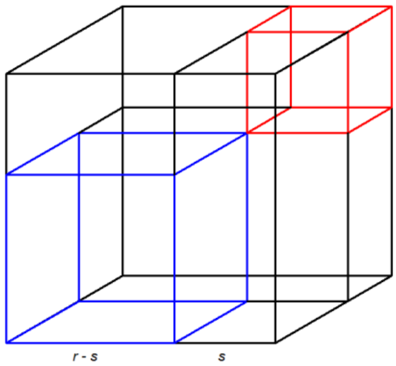
Setzt man $b = 3rs, c = r^3 - s^3$, dann lautet die Gleichung: $x^3 + bx = c$, für die $r - s$ offensichtlich eine Lösung ist.

Um die ursprüngliche kubische Gleichung zu lösen, muss man also nur geeignete Werte für r und s bestimmen.

Aus $s = \frac{b}{3r}$ folgt $r^3 - (\frac{b}{3r})^3 = c$. Umgeformt ergibt sich hieraus $27r^6 - b^3 = 27cr^3$, also $r^6 - cr^3 = \frac{b^3}{27}$.

Dies ist eine quadratische Gleichung in r^3, die mit quadratischer Ergänzung gelöst werden kann:

$\left(r^3 - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{b^3}{27} + \frac{c^2}{4}$, also $r = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{b^3}{27} + \frac{c^2}{4}}}$. Analog erhält man $\left(s^3 + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{b^3}{27} + \frac{c^2}{4}$, also $s = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{b^3}{27} + \frac{c^2}{4}}}$ und somit die Lösung $x = r - s = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{b^3}{27} + \frac{c^2}{4}}} - \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{b^3}{27} + \frac{c^2}{4}}}$.



Beispiel: Die Gleichung $x^3 + 6x = 2$, also mit $b = 6$ und $c = 2$, hat demnach die folgende Zahl

$x = \sqrt[3]{\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{6^3}{27} + \frac{2^2}{4}}} - \sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{6^3}{27} + \frac{2^2}{4}}} = \sqrt[3]{1 + \sqrt{9}} - \sqrt[3]{-1 + \sqrt{9}} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ als Lösung.

Die *Ars magna* enthält natürlich noch keine Umformungen, wie sie hier abgedruckt sind; vielmehr gibt CARDANO Anweisungen, wie man aus den Koeffizienten b und c schrittweise den Term der Lösungsformel aufbaut.

Erstaunlicherweise genügt die Kenntnis des Lösungsverfahrens für Gleichungen vom Typ $x^3 + bx = c$, denn man kann durch eine geeignete Substitution die allgemeine Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ auf eine Gleichung dieser Form zurückführen:

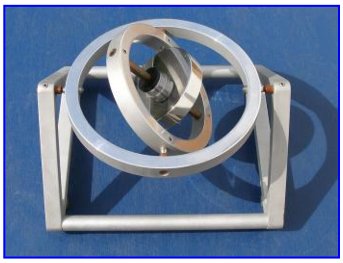
Ersetzt man x durch $y - \frac{a}{3}$, so ergibt sich: $y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right) \cdot y = -\frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c$, also eine Gleichung des Typs $y^3 + my = n$.

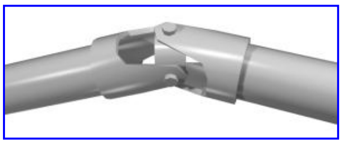
Bei der Untersuchung der verschiedenen Fälle stößt CARDANO auch auf das Problem von Wurzeln aus negativen Zahlen: *Kann man beispielsweise die Zahl 10 so in zwei Summanden zerlegen, dass deren Produkt 40 ergibt?*

Die Lösung des Problems, nämlich die Zerlegung von 10 in die Summanden $5+\sqrt{-15}$ und $5-\sqrt{-15}$, bezeichnet er als *ebenso raffiniert wie nutzlos*. Erst RAFAEL BOMBELLI (1526–1572) kann mit imaginären Größen umgehen und formuliert die zugehörigen Rechengesetze.

TARTAGLIA ist außer sich, als er von der Veröffentlichung CARDANOs erfährt, und beschuldigt diesen des Meineids. Dieser reagiert nicht; die öffentliche Auseinandersetzung überlässt er FERRARI. Auf einen Wettstreit mit FERRARI lässt er sich 1548 erst ein, als man ihm – im Falle eines Sieges – eine herausragende Stellung in Brescia verspricht. Am Ende des ersten Wettkampftages erkennt TARTAGLIA, dass FERRARI ihm überlegen ist, und er verlässt den Ort des Wettstreits. In Brescia hält er ein Jahr lang Vorlesungen über EUKLID, bevor man ihm eröffnet, dass er kein Honorar dafür zu erwarten hat, da er ja im Wettstreit mit FERRARI unterlegen sei.
Seine letzten Lebensjahre verbringt TARTAGLIA als Lehrer in Venedig; 1557 stirbt er, verbittert und verarmt. Auch wenn er durch CARDANO hinsichtlich der Lösung kubischer Gleichungen übertroffen wurde, ist seine Lebensleistung nicht unbedeutend: 1537 veröffentlicht er das Werk *Nova Scientia*, das sich mit ballistischen Fragen beschäftigt (es enthält u. a. die Feststellung, dass die größte Schussweite bei einem Schusswinkel von 45° erzielt wird). TARTAGLIA übersetzt als Erster *Die Elemente* des EUKLID ins Italienische und gibt eine Übersetzung der Werke des ARCHIMEDES heraus.

CARDANO hingegen genießt nach der Veröffentlichung der *Ars magna* seinen Ruhm als bedeutendster Mathematiker seiner Zeit. Erfolgreich ist er jedoch nicht nur in der Mathematik: Insgesamt veröffentlicht er mehr als 200 Werke zu medizinischen, mathematischen, physikalischen und philosphischen Themen. Als erster Mediziner beschreibt er die Symptome von Typhus-Erkrankungen und stellt die Unterschiede zwischen Syphilis und Gonorrhö heraus. Ihn erreichen Angebote verschiedener europäischer Herrscherhäuser, aber nur einmal verlässt er Italien: In Schottland heilt er den Erzbischof von St. Andrews, der unter lebensbedrohlichem Asthma leidet; dieser zahlt ihm dafür ein Vermögen.





Seinen Ruf als Universalgelehrter beweist er u. a. durch die Beschreibung eines technischen Prinzips, das heute seinen Namen trägt: Eine KARDANische Aufhängung ermöglicht es, Messinstrumente durch zwei zueinander senkrecht stehende Achsen drehbar zu lagern; dieses Prinzip wird auch beim KARDAN-Gelenk berücksichtigt.

(Fotos: Wikipedia)

Mit den Ereignissen des Jahres 1560 verändert sich CARDANOs Leben in dramatischer Weise: Die Ehe seines ältesten Sohnes gerät aus den Fugen; am Ende vergiftet der Sohn seine Ehefrau und wird dafür vom Gericht zum Tode verurteilt. Als Vater eines Mörders verliert CARDANO Ansehen und Anstellung. Er nimmt eine Medizin-Professur in Bologna an, schafft sich aber durch arrogantes Auftreten schnell wieder Feinde. Sein zweiter Sohn verspielt alles, was er selbst besitzt, und, als der Vater ihm kein Geld mehr gibt, bricht er in dessen Haus ein, um ihn zu bestehlen. Nach der Anzeige des Vaters wird der Sohn aus der Stadt verbannt.

1570 dann wird CARDANO selbst inhaftiert – wegen Ketzerei: Er hatte ein Horoskop über Jesus Christus erstellt. Die Inquisition will an ihm ein abschreckendes Exempel statuieren; aber der Papst, der ihn als medizinischen Berater schätzt, vergibt ihm und gewährt ihm sogar eine Leibrente. Bis zu seinem Lebensende lebt er in Rom und verfasst seine Memoiren. LEIBNIZ schreibt über CARDANO: *„Er war trotz all seiner Fehler ein großer Mann; ohne sie wäre er aber unvergleichlich gewesen.“*