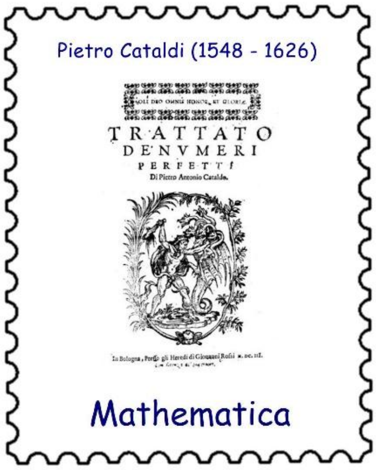
März 2026

Vor 400 Jahren starb Pietro Cataldi (15.04.1552 – 11.02.1626)



Nur wenig ist über die ersten Lebensjahre von PIETRO ANTONIO CATALDI bekannt – der Vorname des Vaters war PAOLO, sein Geburtsort Bologna, die Stadt gehörte in dieser Zeit zum Kirchenstaat. Weiter ist überliefert, dass er bereits im Alter von 17 Jahren Unterricht in Mathematik an der Kunstakademie in Florenz erteilte und 1572 an die Universität in Perugia (Umbrien) wechselte. 1584 kehrte er wieder in seine Heimatstadt zurück und erwarb dort den Doktorgrad in Philosophie. Danach lehrte er bis zu seinem Lebensende die Fächer Mathematik und Astronomie am *Studio di Bologna*, der ältesten europäischen Universität, und zwar in italienischer Sprache und nicht, wie sonst üblich, in Latein.

Als er (unverheiratet) im Jahr 1626 starb, wurde gemäß seinem letzten Willen in seinem Haus ein Internat für arme Kinder eingerichtet, für dessen Unterhaltung das hinterlassene Vermögen verwendet wurde.

CATALDI verfasste über 30 Schriften, den ersten Teil seiner *Pratica aritmetica, ovvero elementi pratici delli numeri aritmetici* wohl bereits im Alter von 17 Jahren. Das Buch erschien 1602 in gedruckter Form (unter dem Pseudonym PERITO ANNOTIO), drei weitere Bände unter seinem tatsächlichen Namen im Zeitraum zwischen 1606 und 1617.

Während seiner gesamten aktiven Zeit beschäftigte er sich intensiv mit den *Elementen* des EUKLID. In seinem letzten Lebensjahr veröffentlichte er eine dreibändige EUKLID-Ausgabe (*Difesa di Euclide*).

1603 war er zur Überzeugung gekommen, dass es ihm gelungen war, das Parallelenaxiom aus den anderen vier Axiomen herzuleiten. In seiner Schrift *Opusculum de lineis rectis aequidistantibus, et non aequidistantibus* definierte er: *Eine Gerade heißt äquidistant zu einer anderen Geraden (derselben Ebene), wenn zwei kürzeste Verbindungen von zwei verschiedenen Punkten der einen Gerade zur anderen Gerade gleich lang sind*.
Was ihm nicht bewusst war: Diese Definition der Äquidistanz zweier Geraden ist äquivalent zur Aussage des Parallelenaxioms.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

In seinem Werk aus dem Jahr 1603 kündigte CATALDI eine weitere Veröffentlichung an, die dann doch erst im Jahr 1613 erschien: *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri, et regole da approssimarsi di continuo al vero nelle radici de' numeri non quadrati* (Abhandlung über die kürzeste Methode zur Ermittlung der Quadratwurzel von Zahlen und Regeln zur schrittweisen Annäherung an den wahren Wert von Wurzeln aus nicht-quadratischen Zahlen).

RAFAEL BOMBELLI (1526-1572), einer der Vorgänger CATALDIs an der Universität von Bologna, hatte einen ersten Vorschlag für einen geeigneten Algorithmus geliefert: Um einen Näherungsbruch für $\sqrt{13}$ zu bestimmen, machte er – ausgehend von der nächstkleineren Quadratzahl – den Ansatz $3+x=\sqrt{13}$, nach Quadrieren ergibt sich hieraus $6x+x^2=4$. Vernachlässigt man x^2, dann bleibt $6x \approx 4$, also $x \approx \frac{2}{3}$. Hieraus folgt dann $x^2 \approx \frac{2}{3}x$. Aus $6x+\frac{2}{3}x=4$ erhält man dann den Näherungswert $x \approx \frac{4}{6+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$, mit dem die Rechnung wiederholt werden kann.

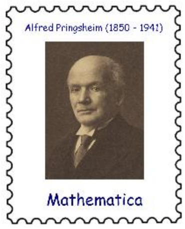
CATALDI formte die Gleichung $6x+x^2=4$ auf andere Weise um: Aus $x\cdot(6+x)=4$ ergibt sich $x=\frac{4}{6+x}$. Die gesuchte Zahl x ist also auf jeden Fall kleiner als $\frac{4}{6+0}=\frac{2}{3}$. Somit gilt: $3<\sqrt{13}<3\frac{2}{3}$ mit $(3\frac{2}{3})^2 = 13\frac{4}{9}$. Im nächsten Schritt ersetzte er im Nenner des Bruchs $\frac{4}{6+x}$ die Variable x durch den zuvor erhaltenen Bruchterm: $x=\frac{4}{6+\frac{4}{6+x}}$. Wegen $\frac{4}{6+\frac{4}{6+x}} > \frac{4}{6+\frac{4}{6+0}}$ ergibt sich nunmehr ein kleinerer Näherungswert für x: $\frac{4}{6+\frac{4}{6+x}} > \frac{4}{6+\frac{4}{6+0}} = \frac{4}{\frac{40}{6}} = \frac{3}{5}$ mit $3\frac{3}{5}<\sqrt{13}<3\frac{2}{3}$ und $(3\frac{3}{5})^2 = 12\frac{24}{25}$. Beim nächsten Iterationsschritt, also nach dem erneuten Einsetzen des Bruchterms, ergibt sich aus $\frac{4}{6+\frac{4}{6+\frac{4}{6+x}}}$ ein Näherungswert, der wiederum größer ist als x, aber kleiner als $\frac{2}{3}$: $\frac{4}{6+\frac{4}{6+\frac{4}{6+0}}} = \frac{4}{6+\frac{3}{5}} = \frac{20}{33}$ mit $(3\frac{20}{33})^2 = 13\frac{4}{1089}$.

CATALDI erkannte, dass man bei Fortsetzung dieses Verfahrens einen immer besseren Näherungswert für $\sqrt{13}$ erhält: In nächsten Schritten ergibt sich $\frac{4}{6+\frac{20}{33}} = \frac{66}{109}$, $\frac{4}{6+\frac{66}{109}} = \frac{109}{180}$, $\frac{4}{6+\frac{109}{180}} = \frac{720}{1189}$ usw. mit $3\frac{3}{5} < 3\frac{66}{109} < 3\frac{720}{1189} < \ldots < \sqrt{13} < \ldots < 3\frac{109}{180} < 3\frac{20}{33} < 3\frac{2}{3}$.

Der Näherungsbruch $3\frac{720}{1189}$ gibt den Wert von $\sqrt{13}$ mit 5-stelliger Genauigkeit an.

Für aufeinanderfolgende Näherungsbrüche $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{20}{33}, \frac{66}{109}, \frac{109}{180}, \frac{720}{1189}, \ldots$, allgemein $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots$, gilt dabei, dass sich die Produkte $p_i \cdot q_{i+1}$ und $p_{i+1}\cdot q_i$ jeweils um 1 unterscheiden.

Auch wenn CATALDI seine Rechnungen nur an Zahlenbeispielen demonstrierte, kann er mit Recht als Entdecker des Approximationsverfahrens durch Kettenbrüche bezeichnet werden. Für die geschachtelten Brüche wählte er – wegen der Schwierigkeiten der Schriftsetzer – die Schreibweise $3\,\&\,\frac{4}{6.}\,\&\,\frac{4}{6.}\,\&\,\frac{4}{6.}$, wobei der jeweils im Nenner stehende Punkt andeuten soll, wo der nächste Bruch anzusetzen ist. Die Schreibweise erinnert an die heute übliche Notation $3+\frac{4|}{|6}+\frac{4|}{|6}+\frac{4|}{|6}+\ldots$ von ALFRED PRINGSHEIM.



Allgemeine Darstellung des CATALDI'schen Algorithmus

Aus dem Ansatz $\sqrt{a^2+b}=a+x$ ergibt sich durch Umformung $x=\frac{b}{2a+x}$ und hieraus die Kettenbruchentwicklung $\sqrt{a^2+b}=a\,\&\,\frac{b}{2a.}\,\&\,\frac{b}{2a.}\,\&\,\frac{b}{2a.}\,\&\ldots$

CATALDIS Name wird oft auch im Zusammenhang mit den *vollkommenen Zahlen* erwähnt: Im Jahr 1603 veröffentlichte er sein Werk *Trattato de' numeri perfetti.*

Seit EUKLID war der folgende Satz bekannt:

- Ist die natürliche Zahl $n = 2^k - 1$ eine Primzahl, dann ist $m = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ eine vollkommene Zahl, d. h., die Summe der echten Teiler dieser Zahl ist gleich der Zahl m.

Die Voraussetzung, dass sich eine Zahl vom Typ $n = 2^k - 1$ *nicht* in Faktoren zerlegen lässt, ist eine wesentliche Bedingung. CATALDI zeigte in diesem Zusammenhang:

Ist die natürliche Zahl $n = a \cdot b$ *mit* $a, b \in \mathbb{N}$ *eine zusammengesetzte Zahl, dann ist* $2^n - 1$ *ebenfalls keine Primzahl; denn* $2^{a \cdot b} - 1 = (2^a - 1) \cdot (1 + 2^a + 2^{2a} + 2^{3a} + ... + 2^{(b-1) \cdot a})$.

Im Altertum waren nur die vier kleinsten vollkommenen Zahlen bekannt ($k = 2, 3, 5, 7$):

$2^1 \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6 = 1 + 2 + 3$, $2^2 \cdot (2^3 - 1) = 4 \cdot 7 = 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$,

$2^4 \cdot (2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$ und

$2^6 \cdot (2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$.

Der Rechenmeister HUDALRICHUS REGIUS (ULRICH RIEGER) aus Freiburg hatte 1536 die fünfte vollkommene Zahl gefunden: $2^{12} \cdot (2^{13} - 1) = 33.550.336$. CATALDI entdeckte dann 1603 die nächsten beiden: $2^{16} \cdot (2^{17} - 1) = 8.589.869.056$ und $2^{18} \cdot (2^{19} - 1) = 137.438.691.328$ – nach mühsamen Rechnungen mithilfe von Primzahl-Tabellen. (Die vierte, fünfte und sechste vollkommene Zahl hatte bereits zuvor der ägyptische Mathematiker ISMAIL IBN FALLŪS (1194-1252) entdeckt, was jedoch in Europa nicht bekannt war.)

1612 erschien CATALDIS *Trattato della quadratura del cerchio* (Abhandlung zur Bestimmung der Kreisfläche) – mit dieser Schrift reagierte er auf eine Veröffentlichung des aus Frankreich stammenden Historikers und Philologen JOSEPH JUSTUS SCALIGER (1540-1609). Dieser hatte 1583 durch sein bahnbrechendes *Opus de emendatione temporum* (Lehrbuch der Chronologie) internationales Ansehen erworben. Nach Übernahme eines Lehrstuhls für Geschichte im niederländischen Leiden veröffentlichte SCALIGER 1594 das mit Spannung erwartete Werk *Cyclometrica elementa*; in diesem behauptete er u. a., dass ein *einbeschriebenes* regelmäßiges 12-Eck einen größeren Umfang habe als die Kreislinie und dass π gleich $\sqrt{10}$ sei – ein Maß, dass außerhalb des von ARCHIMEDES hergeleiteten Intervalls $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ lag. Hinweise auf Rechenfehler wertete der Nicht-Mathematiker SCALIGER als nebensächlich ab; da es ihm in seinen Ausführungen vor allem darum gegangen sei, dass die *Vorgehensweise* des ARCHIMEDES *logisch nicht korrekt* ist, da dieser bei seiner Herleitung das *Prinzip des indirekten Beweises* (*reductio ad absurdum*) angewandt habe. Außer CATALDI nahmen u. a. auch CHRISTOPHER CLAVIUS und FRANÇOIS VIÈTE Stellung, was SCALIGER nicht beeindruckte. Der ebenfals in Leiden lebende LUDOLPH VAN CEULEN, ein ausgebildeter Fechtmeister, der auch Mathematik unterrichtete, wagte sich zunächst nicht, den Aussagen des angesehenen Akademikers SCALIGER zu widersprechen – insbesondere, weil er selbst der lateinischen Sprache nicht mächtig war. Gleichwohl veröffentlichte er 1596 ein Werk mit dem Titel *Vanden circkel* (Vom Kreis), in dem er ein regelmäßiges $15 \cdot 2^{31}$-Eck betrachtete und darin die Kreiszahl π auf 20 Stellen genau bestimmte (seit dieser Veröffentlichung wurde π oft auch als *Ludolph'sche Zahl* bezeichnet).