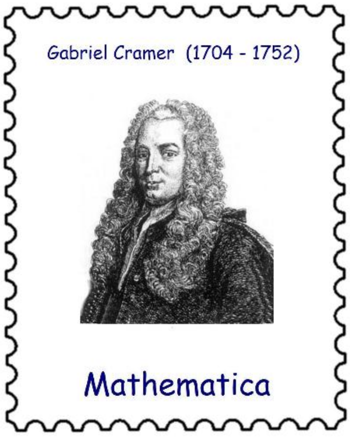
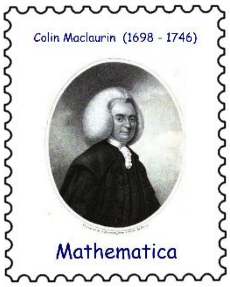
Januar 2019

Vor 267 Jahren gestorben **GABRIEL CRAMER** (31.07.1704 – 04.01.1752)



Es ist noch gar nicht so lange her, dass der Name des Schweizer Mathematikers GABRIEL CRAMER aus den Mathematik-Lehrplänen der Gymnasien gestrichen wurde. Die nach ihm benannte CRAMER'sche Regel (s. u.) bietet nämlich eine bequeme Möglichkeit, einfache lineare Gleichungssysteme (mit zwei oder drei Gleichungen bzw. Variablen) ohne Umformungen zu lösen. Diese Regel wurde bereits 1678 von GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ entdeckt, aber nicht veröffentlicht. Etwa zeitgleich zu LEIBNIZ entwickelte SEKI KOWA im fernen Japan eine ähnliche Methode; es ist aber kaum anzunehmen, dass dessen Erkenntnisse sehr schnell nach Europa gelangten. Auch COLIN MACLAURIN hatte im Prinzip die gleiche Idee wie CRAMER (*Treatise of algebra*, 1748); jedoch fehlte bei ihm ein entscheidender Schritt zur Verallgemeinerung.



GABRIEL CRAMER genießt als Sohn eines angesehenen Genfer Arztes die bestmögliche Schulbildung. Im Alter von 13 Jahren wechselt er an die *Académie de Genève*, studiert Mathematik und Philosophie bei ÉTIENNE JALLABERT; mit einer Dissertation zur Theorie des Schalls schließt er als 18-Jähriger sein Studium ab. Als JALLABERT zwei Jahre danach stirbt, bewirbt sich CRAMER um dessen Nachfolge auf den Lehrstuhl für Philosophie, zusammen mit seinem ein Jahr älteren Freund JEAN-LOUIS CALANDRINI. Der Magistrat der Stadt Genf entscheidet sich für einen dritten Bewerber, den 26-jährigen Theologen AMÉDÉE DE LA RIVE. Da die beiden jungen Bewerber jedoch einen hervorragenden Eindruck hinterlassen haben, fassen die Vertreter der Stadt einen klugen Beschluss: Der Philosophie-Lehrstuhl soll geteilt werden (auch um ein Gegengewicht zum Einfluss der Kirche zu bilden); die zusätzlich eingerichtete Professur erhält den Schwerpunkt *Mathematik*. Die beiden jungen Bewerber werden beauftragt, *gemeinsam* die Vorlesungen zur Mathematik zu übernehmen. CRAMER hält die Vorlesungen zur Geometrie und Mechanik, CALANDRINI die zu Algebra und Astronomie.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Der Magistratsbeschluss enthält noch eine weitere Auflage: Die jungen Akademiker werden verpflichtet, sich während einer *Grand Tour* durch europäische Universitäten über den aktuellen Stand der Forschung zu informieren. Während ihrer Abwesenheit muss der jeweils andere die volle Lehrverpflichtung bei verdoppeltem Gehalt übernehmen.

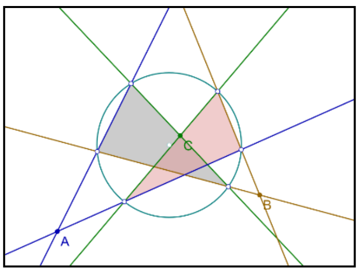
1727 beginnt CRAMER seine zweijährige akademische Rundreise in Basel, arbeitet dort mit JOHANN und NIKOLAUS BERNOULLI zusammen, lernt auch noch LEONHARD EULER kennen, ehe dieser einen Ruf nach St. Petersburg annimmt. Er setzt dann seine Reise fort und begegnet in Cambridge und London u. a. EDMOND HALLEY, ABRAHAM DE MOIVRE und JAMES STIRLING. Über die Universität Leiden geht es dann weiter nach Paris (ALEXIS-CLAUDE CLAIRAUT, GEORGES-LOUIS LECLERC BUFFON, PIERRE LOUIS MOREAU DE MAUPERTUIS). Zu all diesen Zeitgenossen bleibt er bis zu seinem Tod in brieflichem Kontakt.

Nach Genf zurückgekehrt, verfasst er einen Beitrag zur aktuellen Preisfrage der Pariser *Académie royale* über die Ursache der elliptischen Form der Planeten sowie zur Frage, warum die sonnenfernsten Punkte in den Umlaufbahnen der Planeten nicht fest sind. Zwar gewinnt JOHANN BERNOULLI den Preis, aber CRAMERS Zweitplatzierung trägt dazu bei, dass sein Ansehen in der akademischen Welt wächst.

1734 übernimmt sein Freund CALANDRINI den frei gewordenen Lehrstuhl für Philosophie; von da an ist CRAMER allein für die Lehre der Mathematik in Genf zuständig.

CRAMERS besondere wissenschaftliche Verdienste liegen in zwei Veröffentlichungen: zum einen sein Hauptwerk *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, das 1750 erscheint, zum anderen die Herausgabe der *Gesammelten Werke* von JOHANN BERNOULLI. Dieser hatte den Wunsch geäußert, dass die große Zahl seiner eigenen Schriften noch zu seinen Lebzeiten gesichtet und zusammengestellt werden möge, und für ihn kommt für diesen Auftrag nur GABRIEL CRAMER in Frage. Nach dem erfolgreichen Abschluss der mühe- und verdienstvollen Arbeit übergibt JOHANN BERNOULLI 1742 auch die Schriften seines 1705 verstorbenen Bruders JAKOB an CRAMER, und zwei Jahre später erscheinen auch diese *Gesammelten Werke* – mit Ausnahme der *Ars conjectandi*, die JAKOBS Neffe NIKOLAUS BERNOULLI bereits 1713 ergänzt und veröffentlicht hatte.

In Zusammenarbeit mit dem in Lausanne lehrenden Mathematiker JEAN DE CASTILLON (GIOVANNI FRANCESCO SALVEMINI DA CASTIGLIONE) veröffentlicht er dann noch JOHANN BERNOULLIS Schriftwechsel mit LEIBNIZ. – Für das folgende geometrische Problem findet CASTILLON zwanzig Jahre später (inzwischen ist er erster Astronom der königlichen Sternwarte in Berlin) eine Lösung.



(Abb. von Claudio Rocchini Wikipedia CC BY-SA 4.0)

CRAMER-CASTILLON-Problem: *Zu einem Kreis* k *und drei Punkten* A, B, C, *die nicht auf der Kreislinie liegen, sollen alle möglichen Dreiecke konstruiert werden, deren Umkreis* k *ist und deren Seiten durch die drei Punkte verlaufen.*

Zu seinem 700-seitigen Hauptwerk über algebraische Kurven wird CRAMER insbesondere durch NEWTONs Schrift über kubische Kurven angeregt sowie durch STIRLINGs Ergänzungen hierzu. Nach einführenden Kapiteln, in denen er erläutert, wie Kurven gezeichnet und wie die Gleichungen der Kurven durch geeignete Transformationen vereinfacht werden können, entwickelt er im dritten Kapitel eine Klassifikation algebraischer Kurven durch den Grad des definierenden Polynoms.

Algebraische Kurven 1. Grades werden durch Polynome vom Typ $ax+by+c$ definiert, Kurven 2. Grades durch $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ usw. – für die zugehörigen Kurvengleichungen ($ax+by+c=0$, $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ usw.) werden drei Koeffizienten (2 für Grad 1 und 1 für Grad 0) bzw. sechs Koeffizienten (3 für Grad 2; 2 für Grad 1 und 1 für Grad 0) benötigt, für eine Kurve n-ten Grades also $\frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ Koeffizienten. Da durch Division durch irgendeinen der von null verschiedenen Koeffizienten die Anzahl um 1 reduziert werden kann, ergibt sich somit, dass zur Festlegung $\frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot(n+2)-1=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+3)$ Koeffizienten genügen. Es gilt daher:

Satz von CRAMER: *Die notwendige und hinreichende Anzahl von Punkten, durch die eine in der Ebene liegende algebraische Kurve n-ten Grades eindeutig festgelegt ist, beträgt $\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+3)$ – sofern nicht ein ausgearteter Fall vorliegt .*

Denn das Einsetzen der $\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+3)$ Paare von Punkt-Koordinaten in die Gleichung der Kurve ergibt ein lineares Gleichungssystem mit $\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+3)$ Gleichungen und ebenso vielen Variablen, aus denen die Koeffizienten eindeutig bestimmt werden können. Die Auswahl der Punkte ist allerdings nicht völlig beliebig (*ausgearteter* Fall): Je drei der ausgewählten Punkte dürfen nicht auf einer Geraden liegen.

CRAMER fällt eine paradoxe Situation im Falle kubischer Kurven auf, die er aber selbst nicht erklären kann: Gemäß einem Satz von MACLAURIN können algebraische Kurven m-ten und n-ten Grades bis zu $m\cdot n$ gemeinsame Punkte haben, d. h. für $m=n=3$: Zwei kubische Kurven können sich in 9 Punkten schneiden. Wählt man nun genau diese 9 Schnittpunkte aus, dann dürfte es hierzu nur *eine* kubische Kurve geben – zu den ausgewählten Punkten existieren jedoch zwei Kurven (*CRAMERs Paradox*).

Im Anhang des Buches gibt CRAMER schließlich die nach ihm benannte Regel an; er beschreibt dabei für Gleichungssysteme bis zur 5. Ordnung mit Worten das Verfahren, gemäß dem die Lösungsterme gebildet werden.

CRAMER'sche Regel für 2×2-Gleichungssysteme

Das lineare Gleichungssystem 2. Ordnung $\left| \begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{matrix} \right|$ hat die Lösung

$x_1=\dfrac{b_1\cdot a_{22}-b_2\cdot a_{12}}{a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}}$, $x_2=\dfrac{a_{11}\cdot b_2-a_{21}\cdot b_1}{a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}}$, wenn $a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}\neq 0$.

Der vielbeschäftigte CRAMER – er nimmt zwischenzeitlich auch städtische Ämter wahr und kümmert sich beispielsweise um die Stadtbefestigung – erleidet Ende 1751 nach einem Unfall mit einer Kutsche einen gesundheitlichen Zusammenbruch. Auf dem Weg nach Südfrankreich, wo er sich von den Strapazen erholen soll, stirbt er, bevor er sein Ziel erreicht hat.