Oktober 2012

Vor 1750 Jahren wirkte **Diophant von Alexandria** (um 250 n. Chr.)

Zeichnung © Andreas Strick 2012

Ob Diophant tatsächlich so ausgesehen hat, wie in der Darstellung links zu sehen ist, darf bezweifelt werden; denn über diesen berühmten Mathematiker weiß man noch nicht einmal, wann er gelebt hat. In einer Schrift über Polygonalzahlen zitiert Diophant eine verloren gegangene Schrift des Hypsikles, ein Mathematiker und Astronom, der um 175 v. Chr. lebte; das wäre der früheste Zeitpunkt, den man für seine Lebensdaten ansetzen könnte. Andererseits bezieht sich Theon von Alexandria, Vater der berühmten Mathematikerin Hypatia, im Jahr 364 n. Chr. in einer Schrift auf die *Arithmetica*, das Hauptwerk Diophants. Da in einem Papyrus aus dem 3. Jahrhundert die gleichen Symbole verwendet werden wie in der *Arithmetica*, vermutet man heute, dass Diophant um 250 n. Chr. in Alexandria gelebt hat.

Auch wenn man nicht herausgefunden hat, *wann* er lebte, weiß man aus einem um 500 entstandenen Epitaph dennoch, *wie alt* er geworden ist. Die zum Rätsel gehörende lineare Gleichung hat die Lösung 84:

Hier dies Grabmal deckt Diophant. Schauet das Wunder! Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein. Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens. Noch ein Zwölftel dazu, sprosst' auf der Wange der Bart. Dazu ein Siebentel noch, da schloss er das Bündnis der Ehe; nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn. Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag. Darauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer von sich scheuchend, auch er kam an das irdische Ziel.

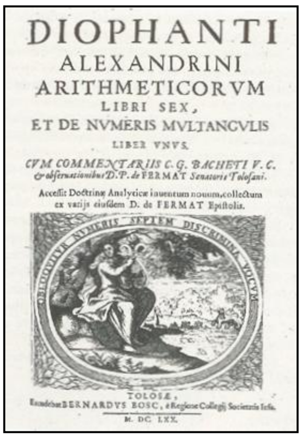
Alexandria spielt in den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung noch eine besondere Rolle als Wissenschaftszentrum der antiken Welt mit einer großen Zahl von Buchrollen (10.000?, 100.000?). Im Jahr 389 jedoch veranlasst der christliche Kaiser Theodosius die Vernichtung aller "heidnischen" Schriften; die Restbestände werden im Jahr 642 auf Befehl des Kalifen Umar verbrannt, da sie „überflüssig" sind. Es ist daher nicht verwunderlich, dass von den Schriften Diophants nur zwei erhalten sind: die *Arithmetica* und die über *Polygonalzahlen*.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Im 9. Jahrhundert werden die noch erhaltenen Schriften der Griechen in Bagdad im *Haus der Weisheit* zusammengetragen und ins Arabische übersetzt, darunter vermutlich auch die ersten sieben der insgesamt 13 Bücher (Kapitel) von DIOPHANTs *Arithmetica*. Aber auch diese Übersetzungen gehen verloren; erst 1971 findet ein Wissenschaftler in Meshed (Iran) eine Kopie der Bücher IV bis VII, die dort unter dem Namen des Übersetzers archiviert waren, da bis dahin keiner der Bibliothekare den in kalligraphischer Schrift verfassten Namen des wahren Autors entschlüsseln konnte.

Unabhängig von den Anstrengungen im islamischen Kulturkreis beginnen byzantinische Gelehrte im 11. Jahrhundert damit, sich mit den Schriften ihrer griechischen Vorfahren zu beschäftigen. Die Aufgaben in DIOPHANTs *Arithmetica* bereiten ihnen jedoch erhebliche Probleme; einer von ihnen schreibt einen Fluch auf DIOPHANT auf den Rand des Kapitels, weil er einen Lösungsansatz nicht nachvollziehen konnte.

1463 entdeckt JOHANNES MÜLLER aus Königsberg, bekannt unter dem Namen REGIOMONTANUS (lateinische Übersetzung von *Königsberger*), in Venedig byzantinische Manuskripte von sechs Büchern der *Arithmetica* – es handelt sich um die Bücher I bis III sowie um drei Bücher, die man heute als Kapitel VIII, IX, X bezeichnet (bis 1971 werden sie irrtümlich mit IV bis VI nummeriert). Von diesem Zeitpunkt an beschäftigen sich zahlreiche europäische Mathematiker mit dieser Sammlung von 189 Aufgaben. 1575 erscheint eine erste gedruckte Übersetzung durch XYLANDER in lateinischer Sprache. 1621 wird in Paris eine Übersetzung durch BACHET DE MÉZIRIAC veröffentlicht, auf deren Rand PIERRE DE FERMAT den berühmten Satz notiert: *Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.* (Ich habe einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, aber dieser Rand ist zu schmal, ihn zu fassen.) – Im Zusammenhang mit dem Problem, eine gegebene Quadratzahl in zwei Quadratzahlen zu zerlegen, stellt er fest, dass das entsprechende Problem für Kubikzahlen nicht lösbar ist und auch nicht für höhere natürliche Exponenten: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit $x, y, z \in \mathbb{N}$ hat keine Lösung für $n > 2$ (FERMAT'sche Vermutung).


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

FERMAT ist fasziniert von der Fülle der originellen Aufgabenstellungen und trickreichen Lösungen in DIOPHANTs Werk, und er setzt sich mit den Problemen und der Frage der Verallgemeinerung einzelner Probleme auseinander. Nach seinem Tod werden FERMATs gesammelte Anmerkungen zur BACHET'schen Übersetzung veröffentlicht (siehe Abb. links), die dann wiederum andere Mathematiker, wie EULER und LAGRANGE, veranlassen, sich noch intensiver mit Fragestellungen zu beschäftigen, die sich aus den Problemen der *Arithmetica* ergeben.

Im ersten Band seiner *Arithmetica* definiert DIOPHANT Grundbegriffe und Buchstabensymbole, die er im Weiteren verwendet: Das Zeichen ς, der letzte Buchstabe des Wortes ἀριθμός (arithmos = Zahl), wird als Platzhalter für die zu bestimmende unbekannte Zahl verwendet; auch führt er besondere Zeichen für deren Potenzen bis zum Grad 6 ein, außerdem für deren Kehrwerte. Terme werden als Abfolge von Zahlsymbolen notiert (vgl. rechts), zwischen denen Zeichen für die Addition bzw. Subtraktion stehen; durch die Buchstaben ἴσ (ἴσος; isos = gleich) werden sie zu Gleichungen ergänzt.

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Im Unterschied zu EUKLID löst DIOPHANT Gleichungen nicht durch geometrische Überlegungen, sondern durch Umformen und Substituieren. Daher hat die Wiederentdeckung der *Arithmetica* die Entwicklung der Algebra maßgeblich beeinflusst.

Während EUKLID Brüche nur im Sinne von Verhältniszahlen verwendet, rechnet DIOPHANT mit ihnen wie mit natürlichen Zahlen. Lösungen der von ihm betrachteten Gleichungen können beliebige positive rationale Zahlen sein (im Unterschied zum heute verwendeten Fachbegriff „DIOPHANTische Gleichungen", deren Lösungen ganzzahlig sein müssen).

Im Buch I beschäftigt sich DIOPHANT mit linearen und quadratischen Gleichungen sowie mit linearen Gleichungssystemen, die er durch geschickte Einführung von neuen Variablen löst; die Methoden sind 2000 Jahre zuvor in Babylonien entwickelt worden und gelten zur Zeit DIOPHANTs offensichtlich als Routineverfahren.

Die im Folgenden aus verschiedenen Büchern ausgewählten Beispiele (hier in der heute üblichen Schreibweise notiert) sollen einen Einblick in die virtuosen Methoden geben, mit denen DIOPHANT die von ihm zusammengestellten Probleme gelöst hat. In den meisten Fällen gibt er außer der beispielgebundenen Lösung auch notwendige Bedingungen für die vorgegebenen Zahlen an.

- Problem 1 aus Buch I: *Eine gegebene Zahl in zwei Zahlen zerlegen, wenn deren Differenz gegeben ist.*

Am Beispiel der Ausgangszahl 100 und Differenz 40 setzt DIOPHANT wie folgt an: Ist x die kleinere Zahl, dann ist $x+40$ die größere Zahl und die Summe der beiden Zahlen ist gleich $2x+40$; daher ist die kleinere Zahl x gleich 30 und die größere gleich 70.

- Problem 16 aus Buch I: *Drei Zahlen zu finden, sodass die Summen von je zwei der Zahlen jeweils gleich vorgegebenen Zahlen sind.*

Wenn z. B. für die vorgegebenen Summen gilt: $x+y=20$, $y+z=30$ und $z+x=40$, dann setzt DIOPHANT $s=x+y+z$, also: $x=s-30; y=s-40; z=s-20$. Für die Summe $x+y+z$ gilt dann: $s=3s-90$, also $s=45$, daher $x=15; y=5; z=25$.

- Problem 28 aus Buch I: *Zwei Zahlen finden, deren Summe und deren Summe der Quadrate der Zahlen gegeben sind.*

Beispiel: Summe der Zahlen: 20, Summe der Quadratzahlen: 208. Ansatz: Bezeichne die Differenz der Zahlen mit 2*x*; dann ist die eine Zahl $10+x$, die andere $10-x$ und die Summe der Quadrate ist $(10+x)^2+(10-x)^2=208 \Leftrightarrow 200+2x^2=208$, $x^2=4$ also $x^2=4$ und $x=2$. Die gesuchten Zahlen sind also 8 und 12.

Problem 8 aus Buch II: *Eine gegebene Quadratzahl in zwei Quadrate zu zerlegen.*
(FERMAT notiert seine berühmte Rand-Bemerkung neben der Lösung dieses Problems.)

Beispiel: Wenn 16 die gegebene Quadratzahl ist und x^2 eine der beiden gesuchten Quadratzahlen, dann muss $16-x^2$ ebenfalls eine Quadratzahl sein.

Ansatz: Setze $16-x^2=(2x-4)^2$, dann ist $5x^2=16x$, also $x=\frac{16}{5}$. Die Zahl 16 lässt sich also in die Quadratzahlen $(\frac{16}{5})^2=\frac{256}{25}$ und $16-\frac{256}{25}=\frac{144}{25}$ zerlegen. Das Verfahren gelingt für jeden Ansatz mit einer natürlichen Zahl m, also: $(mx-4)^2=16-x^2$, wobei die 4 in der Klammer die Wurzel aus der gegebenen Quadratzahl 16 ist.

- Problem 9 aus Buch II: *Eine gegebene Zahl, die Summe zweier Quadrate ist, in zwei andere Quadrate zu zerlegen.*

Das Lösungsverfahren erläutert DIOPHANT am Beispiel der Zahl 13: $2^2+3^2=13$.

Ansatz: $x=2+t; y=2t-3$; dann ist

$x^2+y^2=4+2t+t^2+4t^2-12t+9=5t^2-8t+13=13$, also $t\cdot(5t-8)=0$, d. h. $t=\frac{8}{5}$.

Tatsächlich ist $x=\frac{18}{5}; y=\frac{1}{5}$ eine weitere Zerlegung der Zahl 13 in zwei Quadrate:

$(\frac{18}{5})^2+(\frac{1}{5})^2=\frac{324}{25}+\frac{1}{25}=\frac{325}{25}=13$. Das Verfahren gelingt nicht nur mit dem Ansatz $x=2+t$, $y=2t-3$, sondern für beliebiges $a,k\in\mathbb{N}$ mit $x=2+at; y=kt-3$.

- Problem 11 aus Buch II: *Zu zwei gegebenen Zahlen ein und dieselbe Zahl addieren, so dass jede ein Quadrat wird.*

Beispiel: Die Zahlen sollen 2 und 3 sein, d. h. $2+t$ und $3+t$ müssen dann Quadratzahlen sein. Zur Lösung verwendet DIOPHANT die Eigenschaft, dass für beliebige Zahlen x, y gilt: $(x+y)\cdot(x-y)=x^2-y^2$ und $x=\frac{1}{2}\cdot[x+y)+(x-y)]; y=\frac{1}{2}\cdot[x+y)-(x-y)]$.

Die Differenz $x^2-y^2=(3+t)-(2+t)=1$ lässt sich z. B. als Produkt von $x+y=4$ $x+y=4$ und $x-y=\frac{1}{4}$ darstellen, also ist $x=\frac{1}{2}\cdot[4+\frac{1}{4}]=\frac{17}{8}; y=\frac{1}{2}\cdot[4-\frac{1}{4}]=\frac{15}{8}$, d. h. $x^2=\frac{289}{64}; y^2=\frac{225}{64}$.
Aus $3+t=\frac{289}{64}; 2+t=\frac{225}{64}$ folgt jeweils $t=\frac{97}{64}$.

- Problem 20 aus Buch II: *Zwei Zahlen so zu finden, dass das Quadrat einer jeden, vermehrt um die andere, jeweils ein Quadrat ergibt.*

Sind x, y die beiden Zahlen, dann soll also gelten: x^2+y und y^2+x sind Quadratzahlen.

Ansatz: $x=t; y=2t+1$; dann ist $x^2+y=t^2+2t+1=(t+1)^2$ offensichtlich eine Quadratzahl.

Damit $y^2+x=4t^2+5t+1$ das Quadrat einer Zahl ist, setzt DIOPHANT weiter an:

$4t^2+5t+1=(2t-2)^2=4t^2-8t+4$, also $13t=3$ oder $t=\frac{3}{13}$.

Zwei Zahlen, welche die o. a. Bedingung erfüllen, sind demnach $x=\frac{3}{13}; y=\frac{19}{13}$:

$(\frac{3}{13})^2+\frac{19}{13}=\frac{9}{169}+\frac{19}{13}=\frac{9}{169}+\frac{247}{169}=\frac{256}{169}=(\frac{16}{13})^2$; $\frac{3}{13}+(\frac{19}{13})^2=\frac{3}{13}+\frac{361}{169}=\frac{39}{169}+\frac{361}{169}=\frac{400}{169}=(\frac{20}{13})^2$

Das Verfahren gelingt auch hier mit anderen Ansätzen, bei denen schließlich die Quadrate der Variablen wegfallen.

- Problem 10 aus Buch III: *Drei Zahlen so zu finden, dass das Produkt aus je zwei von ihnen, vermehrt um 12, jedesmal eine Quadratzahl ergibt.*

DIOPHANT macht den Leser darauf aufmerksam, dass man von der Zahl 12 ausgehen sollte, die sich auf unterschiedliche Weise als Produkt darstellen lässt:

$12=2\cdot6=(4-2)\cdot(4+2)=4^2-2^2$, also $2^2+12=4^2$. $12=3\cdot4=(\frac{7}{2})^2-(\frac{1}{2})^2$., also $(\frac{1}{2})^2+12=(\frac{7}{2})^2$.

Startet man mit der Zahl $4t$, dann ist die zweite Zahl $\frac{1}{t}$, und deren Produkt, vermehrt um 12, ist gleich der Quadratzahl 16. Als dritte Zahl muss man $\frac{1}{4}t$ wählen, dann ist das Produkt mit $4t$ gleich t^2 und das Produkt mit $\frac{1}{t}$ gleich $\frac{1}{4}$. Für welche Zahlen t^2+12 eine Quadratzahl ist, findet man mit dem Ansatz $t+3$ heraus: Die Gleichung $t^2+12=(t+3)^2$ hat die Lösung $t=\frac{1}{2}$. Drei geeignete Zahlen sind demnach $2, 2, \frac{1}{8}$.

- Problem 1 aus Buch VIII: *Eine Zahl so in zwei Kubikzahlen zerlegen, dass die Summe der dritten Wurzeln aus den Kubikzahlen gleich einer vorgegebenen Zahl ist.*

Beispiel: Vorgegeben sind 370 und 10; dann sind 343 und 27 die beiden Kubikzahlen.

- Problem 18 aus Buch VIII: *Zwei Zahlen sind so zu finden, dass die dritte Potenz der ersten, vermehrt um die zweite, eine Kubikzahl ergibt und das Quadrat der zweiten, vermehrt um die erste, eine Quadratzahl.*

Lösung: Die Zahlen sind $\frac{1}{16}$ und $\frac{262143}{4096}$.

- Problem 26 aus Buch VIII: *Zwei Zahlen so zu finden, dass ihr Produkt, vermehrt um die beiden Zahlen, eine Kubikzahl ergibt.*

Lösung: Die Zahlen sind $\frac{112}{13}$ und $\frac{27}{169}$.

- Problem 38 aus Buch VIII: *Drei Zahlen so zu finden, dass deren Summe multipliziert mit der ersten Zahl eine Dreieckszahl ergibt, multipliziert mit der zweiten Zahl eine Quadratzahl und mit der dritten Zahl eine Kubikzahl.*

Lösung: Die Zahlen sind $\frac{153}{81}, \frac{6400}{81}, \frac{8}{81}$.

- Problem 15 aus Buch IX: *Drei Zahlen so zu finden, dass die dritte Potenz von deren Summe, vermehrt um jede der Zahlen, eine Kubikzahl ergibt.*

Lösung: Die Zahlen sind $\frac{1538}{3375}, \frac{18577}{3375}, 7$.

- Problem 23 aus Buch IX: *Drei Quadratzahlen so zu finden, dass jede, vermindert um das Produkt der drei Zahlen, eine Quadratzahl ergibt.*

Lösung: Die Zahlen sind $\frac{144}{169}, \frac{100}{169}, \frac{676}{625}$.

- Problem 2 aus Buch X: *Ein rechtwinkliges Dreieck so zu finden, dass die Hypotenuse, addiert zu den anderen beiden Seiten, jeweils eine Kubikzahl ergibt.*

Lösung: Die Seitenlängen sind 135, 352 und 377 (oder Vielfache).

- Problem 18 aus Buch X: *Ein rechtwinkliges Dreieck so zu finden, dass die Hypotenuse, addiert zur Fläche, eine Kubikzahl ergibt, und der Umfang eine Quadratzahl ist.*

Lösung: Die Seitenlängen sind 1257728, 24121185 und 24153953 (oder Vielfache).

Wer sich mit DIOPHANTs *Arithmetica* beschäftigt, spürt die Faszination, die von den Aufgaben ausgeht, und kann nachvollziehen, warum sich so viele berühmte Mathematiker mit ihnen auseinandergesetzt haben. Der deutsche Mathematiker CARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804–1851) fasste die Bedeutung DIOPHANTs in die Worte: *Immer aber wird DIOPHANTOS der Ruhm bleiben, zu den tiefer liegenden Eigenschaften und Beziehungen der Zahlen, welche durch die schönen Forschungen der neueren Mathematik erschlossen wurden, den ersten Anstoß gegeben zu haben.*