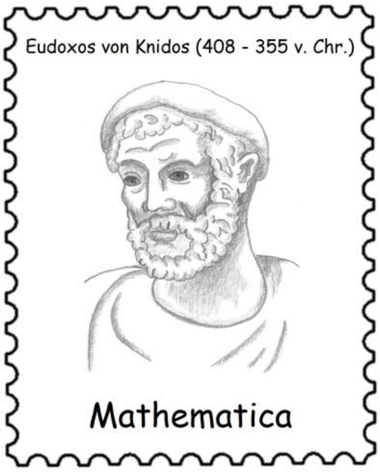
# März 2015

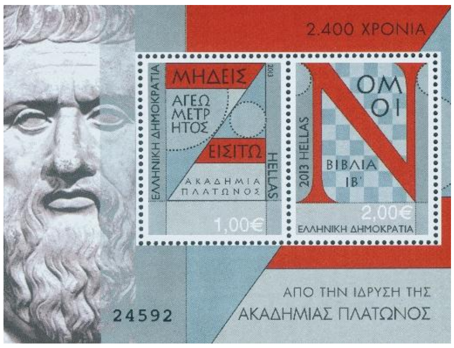
Vor 2400 Jahren wirkte **Eudoxos von Knidos** (408 – 355 v. Chr.)



Zeichnung © Andreas Strick 2015

Auch wenn man von seinen mathematischen Werken noch nicht einmal die genauen Titel kennt und von seinen übrigen Schriften nur Fragmente überliefert wurden, kann man sagen, dass Eudoxos von Knidos einer der bedeutendsten Mathematiker der Antike war.

Bekannt ist, dass der in Knidos (Kleinasien) geborene Wissenschaftler nach Tarent (griechische Kolonie in Süditalien) reist, um dort bei Archytas, einem der Nachfolger des Pythagoras, erste mathematische Studien zu betreiben. Auf Sizilien erwirbt er bei Philiston medizinische Kenntnisse, in Athen besucht er vermutlich die Vorlesungen des Platon und anderer Philosophen der Akademie, in Heliopolis (Ägypten) lässt er sich von den Priestern in die Techniken der astronomischen Beobachtung einführen. Danach gründet er in Kyzikos, einer an der Südküste des Marmara-Meers gelegenen griechischen Kolonie, eine eigene Schule und sammelt zahlreiche Studenten um sich.




Um 368 besucht er Athen ein zweites Mal, begleitet von seinen Schülern, und kehrt anschließend als angesehener Bürger in seine Geburtsstadt Knidos zurück, wo er ein Observatorium errichtet. Seine astronomischen Beobachtungen bilden die Grundlage für (mindestens) ein Werk, das Hipparchos von Rhodos (190–120 v. Chr.) zu seinen Untersuchungen und Überlegungen dient, wie dieser dankbar berichtet.


Durch Aristoteles (384–322 v. Chr.) ist überliefert, dass Eudoxos ein System zur Beschreibung der Planetenbewegungen entwickelt hat. Dieses besteht aus 27 Sphären, in deren Mittelpunkt sich die Erde befindet.

| MO | DI | MI | DO | FR | SA | SO |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 1 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 30 | 31 | | | | | |


Auch verfasst EUDOXOS ein aus sieben Bänden bestehendes Werk zur Geografie, in dem er die Länder und Völker der bekannten Welt beschreibt, die politischen Systeme in diesen Ländern erläutert und über die religiösen Vorstellungen der Völker berichtet. Auch dieses Werk ist verschollen, wird aber von zahlreichen später lebenden Autoren der Antike zitiert.

Die Entdeckung des Pythagoreers HIPPASOS VON METAPONT, dass nicht alle in der Geometrie auftretenden Größen *kommensurabel* sind, also mit einem gemeinsamen Maß messbar, hatte um das Jahr 500 v. Chr. die bis dahin geltende Lehrmeinung „Alles ist Zahl" erschüttert. Beispielsweise kann das Verhältnis der Länge einer Diagonale eines Quadrats zur Seitenlänge des Quadrats nicht durch das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen beschrieben werden.

EUDOXOS findet einen genialen Weg, mit diesem Problem umzugehen. EUKLID übernimmt später (um das Jahr 300 v. Chr.) die Proportionenlehre des EUDOXOS als Buch V. der *Elemente*.


Zunächst definiert EUDOXOS, was unter einem Verhältnis zu verstehen ist: *Ein Verhältnis ist die Beziehung zweier vergleichbarer Dinge der Größe nach* (V.3). *Ein Verhältnis gibt an, wie oft die erste Größe die zweite übertrifft, wenn es mit der zweiten vervielfacht wird* (V.4).

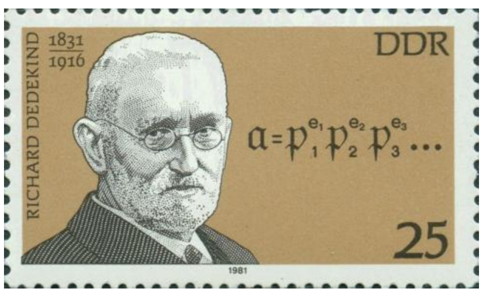
Dann erfolgt die – auf den ersten Blick – kompliziert erscheinende, jedoch äußerst geschickte Definition V.5: *Größen stehen im gleichen Verhältnis, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn für beliebige, aber gleiche Vielfache der ersten und der dritten Größe und für beliebige, aber gleiche Vielfache der zweiten und vierten Größe gilt, dass die paarweise betrachteten Vielfachen entweder beide größer oder beide gleich oder beide kleiner sind.*

In der heute üblichen Schreibweise ausgedrückt: Zwei Proportionen $a:b=c:d$ a : b und c : d von Größen a, b, c, d stimmen genau dann überein, also $a:b=c:d$ , wenn für beliebige Vielfache ($m,n \in \mathbb{N}$) gilt: Aus $m \cdot a > n \cdot b$ folgt $m \cdot c > n \cdot d$; aus $m \cdot a = n \cdot b$ folgt $m \cdot c = n \cdot d$; aus $m \cdot a < n \cdot b$ folgt $m \cdot c = n \cdot d$.

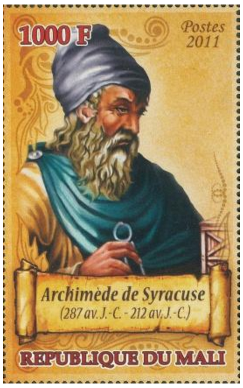
Das Geniale am Ansatz des EUDOXOS ist, dass seine Definition sowohl für rationale als auch für irrationale Größen anwendbar ist: Bei rationalen Größen kommt der Fall der Gleichheit vor, d. h., es lassen sich Vielfache $m$, $n$ angeben, für welche die Gleichheit gilt. Wenn aber die Größen $a$ und $b$ nicht kommensurabel sind, dann gibt es sowohl rationale Zahlen $\frac{m}{n}$, für die $\frac{m}{n} > \frac{b}{a}$ gilt, als auch solche, für die $\frac{m}{n} < \frac{b}{a}$ gilt.

Dies ist im Prinzip nichts anderes als die Idee, dass durch eine Zahl die Menge der reellen Zahlen in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt wird.

Aber es dauert noch über 2200 Jahre, bis RICHARD DEDEKIND diese Idee durch den nach ihm benannten (DEDEKIND'schen) Schnitt umsetzt.



Zu Beginn des Buches X. der *Elemente* des EUKLID findet man eine Methode zur Flächenberechnung, die seit dem 17. Jahrhundert als *Exhaustionsmethode* bezeichnet wird: *Sind zwei ungleiche Größen gegeben und nimmt man von der größeren mehr als die Hälfte weg, vom Rest wieder mehr als Hälfte usw., dann kommt man irgendwann zu einem Rest, der kleiner ist als die gegebene kleinere Größe.*




Mithilfe dieser Ausschöpfungsmethode kann also die Maßzahl einer Fläche beliebig genau bestimmt werden, beispielsweise die eines Kreises durch einbeschriebene Vielecke. Der Satz beruht auf einer Anwendung des sogenannten ARCHIMEDischen Axioms, welches besagt, dass man zu je zwei Größen ein Vielfaches der einen Größe bilden kann, sodass dieses größer ist als die andere Größe. Es wäre durchaus angemessen, wenn dieser Grundsatz nach EUDOXOS benannt worden wäre; denn dieser wird von ARCHIMEDES auch ausdrücklich als der Urheber des Axioms bezeichnet.

Buch XII. der *Elemente* beschäftigt sich mit Flächeninhalten und Volumina. Auch diese Ausführungen beruhen überwiegend auf Sätzen und Beweisen, die EUKLID von EUDOXOS übernimmt. Der Beweis von Satz 2: *Flächeninhalte von Kreisen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser* wird mithilfe der Methode des indirekten Beweises (*reductio ad absurdum*) geführt. Die Annahme, *das Verhältnis der Kreisflächen sei kleiner als das Verhältnis der Quadrate der Durchmesser,* führt zum Widerspruch ebenso wie die Annahme, das Verhältnis sei *größer*. Analog erfolgt dann auch der Beweis für Satz 18: *Volumina von Kugeln verhalten sich wie Kuben ihrer Durchmesser*.


Die zwischen Satz 2 und Satz 18 stehenden Sätze beschäftigen sich mit der Berechnung des Volumens einer Pyramide bzw. eines Kegels. Bereits DEMOKRIT (460–370 v. Chr.) kannte die Formeln, aber wie ARCHIMEDES in seiner Schrift *Über Kugel und Zylinder* ausführt, erfolgte der Beweis der Formeln erst durch EUDOXOS.

Zunächst erläutert er, wie Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche in zwei gleiche, zur gesamten Pyramide ähnliche Pyramiden und zwei Prismen zerlegt werden können. Dann zeigt er, dass sich die Volumina von gleich hohen Pyramiden mit dreieckiger (oder allgemein polygonaler) Grundfläche wie die Flächeninhalte der Grundflächen verhalten. Im nächsten Schritt stellt er dar, wie man ein Prisma in drei volumengleiche Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche zerlegen kann. Aus dem Satz, dass sich die Volumina von zueinander ähnlichen Pyramiden wie die Kuben entsprechender Kantenlängen verhalten, und dem Satz, dass die Grundflächen von volumengleichen Pyramiden umgekehrt proportional zu den Höhen sind, ergibt sich schließlich, dass das Volumen einer Pyramide genau ein Drittel des Volumens eines Prismas mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe ausmacht.

EUDOXOS beschäftigt sich auch mit dem *Deli'schen Problem der Würfelverdopplung*. ERATOSTHENES (276–194 v. Chr.) berichtet, dass EUDOXOS, *der Gottähnliche*, eine graphische Lösung des Problems gefunden habe. Leider sind keine näheren Einzelheiten hierzu überliefert. PLATON soll allerdings die Vorgehensweise kritisiert haben, weil hierdurch die Mathematik *verunreinigt* würde.

© Heinz Klaus Strick Leverkusen 2015