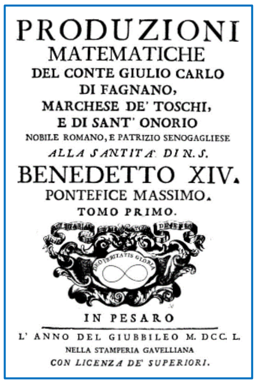
Juli 2023

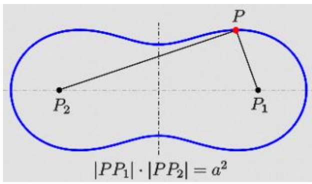
Vor 300 Jahren lebte GIULIO FAGNANO (26.09.1682 – 18.05.1766)

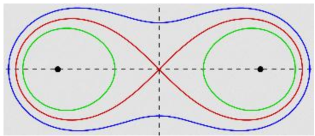
Gemäß CARL GUSTAV JACOB JACOBI war der 23. Dezember 1751 der Geburtstag der *elliptischen Funktionen*; und damit hatte es das Folgende auf sich: LEONHARD EULER war gebeten worden, die gesammelten Schriften *Produzioni matematiche* von Graf GIULIO CARLO FAGNANO zu begutachten, da dieser als Mitglied für die *Berliner Akademie der Wissenschaften* vorgeschlagen worden war. Unter den Beiträgen FAGNANOs entdeckte EULER die Abhandlung *Metodo per misurare la Lemniscata* (Methode zur Messung der Bogenlänge einer Lemniskate) aus dem Jahr 1718, die ihn in Begeisterung versetzte. Tatsächlich war es dem italienischen Mathematiker FAGNANO gelungen, ein Problem zu lösen, mit dem sich zuvor andere vergeblich auseinandergesetzt hatten. EULER erkannte unmittelbar, wie sich der FAGNANO'sche Ansatz verallgemeinern lässt; diese EULER'sche Abhandlung trug dann wesentlich zur Entwicklung der Theorie der elliptischen Funktionen bei.


PRODUZIONI
MATEMATICHE
DEL CONTE GIULIO CARLO
DI FAGNANO,
MARCHESE DE' TOSCHI,
E DI SANT' ONORIO
NOBILE ROMANO, E PATRIZIO SENOGAGLIESE
ALLA SANTITA' DI N. S.
BENEDETTO XIV.
PONTEFICE MASSIMO.
TOMO PRIMO.
IN PESARO
L' ANNO DEL GIUBBILEO M. DCC. L.
NELLA STAMPERIA GAVELLIANA
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

FAGNANO selbst war von den von ihm entdeckten Eigenschaften der Lemniskate so begeistert, dass er die Kurve auf das Titelbild der *Produzioni matematiche* abdrucken ließ und auch verfügte, dass sie auf seinen Grabstein gemeißelt werden soll.

Entdeckt wurde diese Kurve von GIOVANNI DOMENICO CASSINI, der sich um 1680 allgemein mit der Frage beschäftigt hatte, welche Kurven sich ergeben, wenn das *Produkt* der Abstände eines Kurvenpunkts $P(x\,|\,y)$ zu zwei Punkten $P_1(+c\,|\,0)$ und $P_2(-c\,|\,0)$ konstant gleich a^2 ist ($a, c \geq 0$), d. h., es gilt: $(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = a^4 - c^4$. Im Fall $a = c$ erhält man den Graphen der rot eingezeichneten *Lemniskate*.





(Abb. Wikipedia)

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

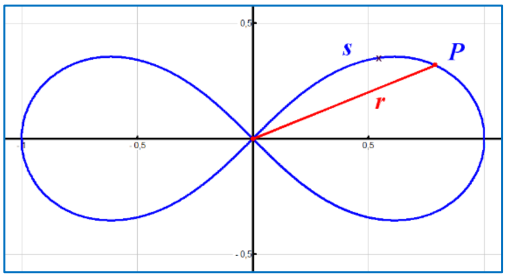
Bogenlänge von Kurven – elliptische Integrale

Ist eine Kurve durch den Graphen einer differenzierbaren Funktion *f* gegeben, dann lässt sich – nach Anwenden des Satzes von PYTHAGORAS – die Länge L des Bogens zwischen zwei Punkten $(a\,|\,f(a))$ und $(b\,|\,f(b))$ mithilfe eines Integrals bestimmen: $L(a,b)=\int_a^b \sqrt{1+(f\,'(x))^2}\,dx$.

Beispielsweise ergibt sich beim Kreis mit $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ und $f\,'(x)=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ für die Länge eines Viertelkreisbogens: $L(0,r)=\int_0^r \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = r\cdot\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = r\cdot[\arcsin(1)-\arcsin(0)]=\frac{\pi}{2}\cdot r$.

Diese Berechnung ist möglich, da das Integral durch eine konkrete *elementare* Funktion beschrieben (man sagt: „in geschlossener Form angegeben“) werden kann. Ähnliches gilt auch für die Zykloide, die logarithmische Spirale und die Parabel, nicht aber für die Berechnung der Bogenlänge bei einer Ellipse oder einer Hyperbel, d. h., man kann zwar die Bogenlänge durch ein Integral ausdrücken, aber keine konkrete Berechnung durchführen. Allgemein bezeichnet man Integrale als *elliptische Integrale*, bei denen die Integrandfunktion eine rationale Funktion ist, die eine Quadratwurzel aus einem kubischen oder biquadratischen Term enthält.

JAKOB BERNOULLI, von dem die Bezeichnung *Lemniskate* (griech. Schleife) stammt, hatte gezeigt, dass die Bestimmung der Länge eines Bogens vom Ursprung zu einem Punkt der Lemniskate auf ein Integral vom Typ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ führt, das allerdings nicht *in geschlossener Form* angegeben werden kann. Diese Integralfunktion konnte er zwar durch eine Reihenentwicklung darstellen, aber weder er noch sein Bruder JOHANN und auch nicht EULER gelangen nennenswerte Fortschritte.



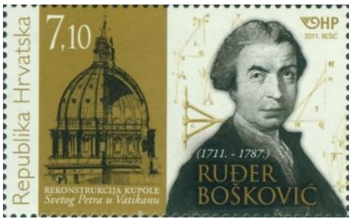
FAGNANO untersuchte die Bogenlänge der Lemniskate mit $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ (d. h. $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$) im 1. Quadranten, also den oberen Bogen zwischen den Punkten $(0\,|\,0)$ und $(1\,|\,0)$. Bezeichnet man den Abstand des Lemniskaten-Punkts $P(x\,|\,y)$ vom Ursprung mit $r=\sqrt{x^2+y^2}$, dann hat dieser Punkt die Koordinaten $(x\,|\,y)=\left(\sqrt{\frac{1}{2}r^2(1+r^2)}\,\middle|\,\sqrt{\frac{1}{2}r^2(1-r^2)}\right)$. Für die Länge $s(r)$ des Bogens vom Ursprung bis zu einem Punkt im Abstand r gilt dann: $s(r)=\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$. Die Bedingung, dass ein solches Bogenstück doppelt so lang ist wie ein anderes, lässt sich durch die Integralgleichung $2\cdot\int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}=\int_0^{r_2}\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$ beschreiben. FAGNANO zeigte, dass dann gilt: $r_2=\frac{2r_1\cdot\sqrt{1-r_1^4}}{1+r_1^4}$.

Um den Punkt zu finden, durch den z. B. der Bogen der Lemniskate halbiert wird, muss die Gleichung $\frac{2r\cdot\sqrt{1-r^4}}{1+r^4}=1$ gelöst werden. Durch Umformungen dieser Gleichung 8. Grades ergibt sich: $\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\,\middle|\,\sqrt{\frac{3\sqrt{2}-4}{2}}\right)\approx(0{,}541\,|\,0{,}348)$ – ein Punkt, der mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, da seine Koordinaten aus Quadratwurzeltermen zusammengesetzt sind. Durch ähnliche Ansätze ergeben sich auch (ebenfalls konstruierbare) Zerlegungen des Lemniskate-Bogens in drei oder in fünf gleichlange Bogenstücke.

Wer war dieser CONTE FAGNANO E MARCHESE DE' TOSCHI E DI SANT'ONOFRIO?

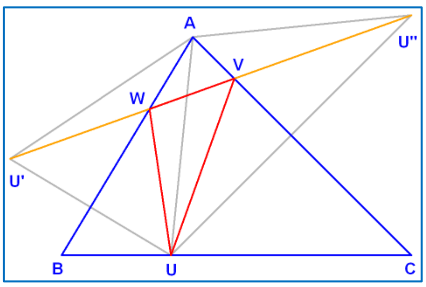
GIULIO CARLO FAGNANO stammte aus einem alten Patriziergeschlecht des zum Kirchenstaat gehörenden Adria-Städtchens Sinigaglia (heute: Senigallia, nahe Ancona). Den Eltern, GIOVANNI FRANCESCO FAGNANI und CAMILLA BARTOLI, war bereits früh aufgefallen, dass ihr Sohn über eine schnelle Auffassungsgabe verfügte. So wurde er zum Studium an das *Collegio Clementino* der *Padri Somaschi* (Orden der Somasker) nach Rom geschickt, wo er sich vor allem für Literatur und Philosophie interessierte. Nach der Studienzeit korrespondierte er mit dem Philosophen NICOLAS MALEBRANCHE über dessen Buch *De la recherche de la vérité*, das später von der katholischen Kirche auf den Index der verbotenen Bücher gesetzt wurde. MALEBRANCHE, der u. a. in regem Kontakt mit GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, JOHANN BERNOULLI und GUILLAUME DE L'HÔPITAL stand, weckte schließlich FAGNANOs Interesse für Mathematik.

In der Tradition der Familie übernahm FAGNANO als *Gonfaloniere* (wörtlich: Bannerträger) verantwortliche Aufgaben in der Verwaltung und in der Gerichtsbarkeit seiner Heimatstadt, sodass nur wenig Zeit für mathematische Studien blieb. Gleichwohl gelang es ihm, sich autodidaktisch auf den aktuellen Stand der mathematischen Forschungen zu bringen. So leitete er 1719 für die Bogenlänge eines Viertelkreises die Formel $2\cdot\log[(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}\cdot(1+\sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}\sqrt{-1}}]$ her – eine Variante der EULER'schen Formel $e^{-\frac{\pi}{2}}=i^{i}$.



Den Adelstitel eines *Grafen* erhielt FAGNANO vom französischen König Louis XV, den eines *Marquis* von Papst Benedikt XIV – zusammen mit RUĐER JOSIP BOŠKOVIĆ hatte er den Papst wegen der Risse in der Petersdom-Kuppel beraten.

Bekannt wurde FAGNANO auch wegen seiner Untersuchungen an Dreiecken; beispielsweise bewies er, dass für den Schwerpunkt X eines Dreiecks ABC die folgende Gleichung gilt: $|XA|^2+|XB|^2+|XC|^2=\frac{1}{3}\cdot(|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2)$.



Weiter beschäftigte er sich mit einem Optimierungsproblem: Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC und ein Punkt U auf einer der Dreiecksseiten. Wie kann man ein Dreieck UVW konstruieren, dessen Eckpunkte auf den Dreiecksseiten von ABC liegen und dessen Umfang minimal ist? (Man findet die Punkte V und W, indem man die Strecke UA an den Seiten AB und AC spiegelt und die Spiegelbilder von U miteinander verbindet.)

Übrigens: Im Jahr 1754 widmete ein junger, unbekannter Turiner Student seine erste wissenschaftliche Veröffentlichung dem von ihm verehrten Mathematiker FAGNANO – sein Name: GIUSEPPE LUIGI LAGRANGIA, später bekannt als JOSEPH LOUIS LAGRANGE.

In FAGNANOs Ehe mit der ebenfalls aus Sinigaglia stammenden FRANCESSCA SASSOFRATO wurden sechs Söhne und sechs Töchter geboren, wovon nur wenige überlebten. Als einziger zeigte sein Sohn GIOVANNI, Kanoniker der Kathedrale von Sinigaglia, Interesse an mathematischen Fragen. Unter anderem veröffentlichte er Rekursionsformeln für $\int x^n \sin x\,dx$ und für $\int x^n \cos x\,dx$. Außerdem bewies er, dass der Umfang eines einbeschriebenen Dreiecks in einem spitzwinkligen Dreieck genau dann minimal wird, wenn die Punkte U, V, W die Höhenfußpunkte des Ausgangsdreiecks sind.