August 2008

Vor 400 Jahren geboren **Pierre de Fermat** (1607/1608 – 12.01.1665)

Im Jahr 2001 gab die französische Post anlässlich des 400. Geburtstages von Pierre de Fermat diese Briefmarke heraus. Sie erinnert an den berühmten, von Fermat formulierten Satz (*Fermatsche Vermutung*), dessen Beweis Andrew Wiles im Jahr 1995 gelungen war.

Das genaue Geburtsdatum Pierre de Fermats lässt sich wohl nicht mehr ermitteln: Zwar existiert eine Eintragung im Taufregister von Beaumont-de-Lomagne (nahe Toulouse) vom 20. August 1601 über die Taufe eines Pierre Fermat, aber die Inschrift seines Grabes in Toulouse besagt, dass Pierre de Fermat am 12.01.1665 im Alter von 57 Jahren starb (also 1607 oder 1608 geboren sein muss). Vermutlich hat es sich so zugetragen: Der wohlhabende Lederhändler Dominique Fermat ist in erster Ehe mit Françoise Cazeneuve verheiratet; 1601 wird ihnen ein Kind namens Pierre geboren und stirbt bald darauf. Nach dem Tod seiner ersten Ehefrau heiratet Dominique Fermat seine zweite Frau, Claire de Long. Einer der in dieser Ehe geborenen Jungen erhält den gleichen Vornamen wie sein verstorbener Halbbruder.

Nach dem Besuch der örtlichen Schule der Franziskaner besucht Pierre Fermat die Universitäten in Toulouse und Bordeaux – mit großem Interesse an mathematischen Themen. In Orléans schließt er ein Jura-Studium an; 1631 wird er als Anwalt in Toulouse zugelassen. Zum *Conseiller au Parlement* (Gericht) ernannt, kümmert er sich um Petitionen der Bürger an die Regierung in Paris. Wegen der Bedeutung des Amtes darf er sich jetzt de Fermat nennen. Im Laufe der Jahre bekleidet er verschiedene Ämter am obersten Gerichtshof in Toulouse; seine berufliche Tätigkeit dient ihm zur Sicherung seines Lebensunterhalts. In einem internen Bericht wird der Jurist Fermat als gelehrt, aber gelegentlich als verwirrt und gedankenverloren beschrieben. Dass er dennoch in höhere Ämter befördert wird, liegt an seiner Unbestechlichkeit und daran, dass viele Juristen am Gerichtshof Opfer einer Pest-Epidemie werden.

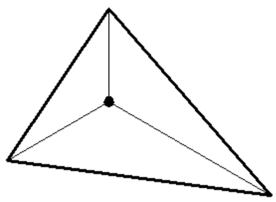
Was Fermat von seinen dienstlichen Aufgaben ablenkt, ist die Mathematik ...

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

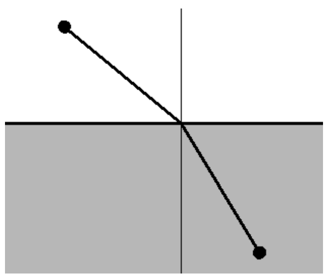
Schon als Student versucht FERMAT, aus Andeutungen und Zitaten die verloren gegangene Schrift *„Plane loci"* des APOLLONIUS VON PERGE (260 – 190 v. Chr.) zu rekonstruieren. Seine Abhandlung *„Ad locos planos et solidos isagoge"* enthält – vor den Veröffentlichungen DESCARTES' – bereits wesentliche Gedanken der Analytischen Geometrie: Die Ideen FRANÇOIS VIÈTES (1540–1603) aufgreifend, löst er geometrische Probleme mit algebraischen Mitteln. Er beschreibt Kurven in der Ebene durch Gleichungen mit zwei Variablen in einem Koordinatensystem und die Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel) durch Gleichungen 2. Grades.

1636 nimmt er Kontakt zu den in Paris lebenden Mathematikern um den Franziskaner MARIN MERSENNE (1588–1648) auf und legt ihnen Probleme vor, für die er selbst eine Lösung gefunden hat. Trotz wiederholter Aufforderung nimmt er sich jedoch nie die Zeit, die von ihm entwickelten Verfahren auszuarbeiten. Seine Schrift *„Methodus ad disquirendam maximam et minimam"* (Abhandlung über Maxima und Minima) zur Bestimmung von Tangenten an Kurven, von Extremwerten und von Flächen unter den Graphen der Potenzfunktionen („FERMATsche Parabeln" $y = x^n$ bzw. „FERMATsche Hyperbeln" $y = \frac{1}{x^n}$) ist für viele unverständlich. NEWTON (1643–1727) nennt die Abhandlung *„eine inspirierende Quelle"*; LAPLACE (1749–1827) sieht in FERMAT (in nationaler Begeisterung) den wahren Erfinder der Differentialrechnung.

Zu den von FERMAT gelösten Extremwert-Problemen zählt auch: In welchem Punkt im Innern eines Dreiecks mit Winkeln unter 120° ist die Summe der Entfernungen zu den drei Eckpunkten minimal? Für diesen FERMAT-Punkt gilt: Die Verbindungsstrecken zu den drei Eckpunkten bilden stets Winkel von 120° zueinander.



FERMAT kritisiert die Abhandlung von RENÉ DESCARTES (1596–1650) zur Optik als fehlerhaft, was dessen wütende Kritik an seinen Theorien hervorruft – er erkennt in FERMAT einen mindestens ebenbürtigen Rivalen. Zwanzig Jahre später greift FERMAT erneut das Problem der Lichtbrechung auf und leitet ein grundlegendes Gesetz der Optik her, das den Weg eines Lichtstrahls beim Übergang zwischen zwei Medien beschreibt: Das Licht wählt den „schnellsten", nicht den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten (sog. *FERMATsches Prinzip*). In Luft beispielsweise hat das Licht eine Geschwindigkeit von ca. 300.000 km/h, im dichteren Medium, z. B. in Glas, nur eine von ca. 200.000 km/h. Der Lichtstrahl verläuft so, dass $\sin(\alpha) : \sin(\beta) = 3 : 2$ ist.



Von 1643 bis 1654 hat FERMAT wegen eines Bürgerkriegs und der Pest-Epidemie keine Kontakte zu den Mathematikern in Paris. Angeregt durch die *„Arithmetica"* des DIOPHANTOS (um 250 n. Chr.) vertieft er sich in ein Gebiet, für das die Mathematiker seiner Zeit wenig Interesse zeigen: die Zahlentheorie. Fünf Jahre nach seinem Tod entdeckt sein Sohn CLÉMENT-SAMUEL auf dem Rand einer kommentierten DIOPHANT-Übersetzung des BACHET DE MÉZIRIAC (1581–1638) den Satz, der später als FERMATsche Vermutung bezeichnet wird: „Die DIOPHANTische Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit $x, y, z \in \mathbb{N}$ hat keine Lösung für natürliche Zahlen $n > 2$." Statt einer Beweisidee notiert er den berühmten Satz: *„Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.* " (Ich habe einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, aber dieser Rand ist zu schmal, ihn zu fassen.)

Man kann davon ausgehen, dass Fermat sich irrte; viele Mathematiker bemühten sich um den Beweis, der dann mit großem Aufwand 1995 gelang. Er selbst geht auf den Satz in allgemeiner Fassung später nicht mehr ein, was vielleicht darauf hindeutet, dass er seinen Irrtum erkennt. Er selbst beweist den Satz für den Spezialfall $n = 4$ nach der von ihm entwickelten *Methode des unendlichen Abstiegs*: Ausgehend von einem Lösungstripel $(x; y; z) \in \mathbb{N}^3$ für die Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ konstruiert er ein weiteres Tripel $(x_1; y_1; z_1) \in \mathbb{N}^3$ mit $x_1 < x, y_1 < y, z_1 < z$, und durch Wiederholung dieser Methode eine unendliche Folge von immer kleiner werdenden Lösungstripeln – was im Widerspruch zur Beschränktheit der natürlichen Zahlen nach unten steht.

1654 erhält Fermat einen Brief von Blaise Pascal (1623–1662), der ihn um Bestätigung seiner eigenen Ideen zur Lösung zweier Probleme bittet, die ihm der Chevalier de Méré vorgelegt hatte: Warum lohnt es sich beim 4-fachen Würfeln, darauf zu wetten, dass mindestens eine Sechs fällt, aber nicht darauf, dass beim 24-fachen Würfeln mit zwei Würfeln mindestens ein Sechser-Pasch auftritt? („*Problème des dés*"), ferner: Bei einem Glücksspiel zweier Spieler über mehrere Runden gewinnt derjenige den gesamten Spieleinsatz, der als Erster eine bestimmte Punktzahl erreicht. Das Spiel muss bei einem gewissen Zwischenstand abgebrochen werden. Wie ist die gerechte Aufteilung des Spieleinsatzes? („*Problème des partis*"). Dieser Briefwechsel gilt als die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Fermat versucht vergeblich, Pascal auch für Probleme der Zahlentheorie zu interessieren. Eine Fülle solcher Probleme stellt er seinen Briefpartnern in Europa, z. B.: „Finde alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $Nx^2 + 1 = y^2$ $(N \in \mathbb{N})$." oder: „Weise nach, dass die Gleichung $x^2 + 4 = y^3$ genau zwei Lösungen, die Gleichung $x^2 + 2 = y^3$ genau eine Lösung hat." - Er entdeckt, dass sich Primzahlen der Form $4n+1$ eindeutig als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen lassen ($5 = 2^2 + 1^2, 13 = 3^2 + 2^2, 17 = 4^2 + 1^2, 29 = 5^2 + 2^2, \ldots$), und dass dies nicht möglich ist für Primzahlen der Form $4n-1$.

Die Eigenschaft „Ist p eine Primzahl und a eine ganze Zahl, die nicht durch p teilbar ist, dann lässt sich die Zahl $a^{p-1} - 1$ immer durch p teilen." nutzt er als Primzahltest - heute wird der Satz als „*Kleiner Fermatscher Satz*" bezeichnet.

Seine Vermutung, dass *alle* Zahlen der Form $p_n = 2^{2^n} + 1$, also die Zahlen $p_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$, $p_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$, $p_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$, $p_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$, $p_4 = 2^{2^4} + 1 = 65.537$ Primzahlen sind (sog. *Fermatsche Primzahlen*), erweist sich allerdings als falsch, wie 1732 Euler als Erster herausfindet ($p_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6.700.417$).

1643 entwickelt Fermat auch ein geniales Verfahren zur Faktorisierung großer Zahlen; in einem Brief an Mersenne demonstriert er es an der Zahl $n = 2.027.651.281$. Der Algorithmus beginnt mit der kleinsten ganzen Zahl x, die größer als die Wurzel aus der betrachteten Zahl n ist. Wenn $x^2 - n$ eine Quadratzahl y^2 ist, dann ist eine Zerlegung durch $n = (x-y) \cdot (x+y)$ gegeben, sonst überprüft man dies für die Zahl $x+1$.

Da Fermat nur wenige zusammenhängende Schriften verfasste, sondern seine vielen Ideen vor allem über die umfangreiche Korrespondenz verbreitete, wurde erst viele Jahre nach seinem Tod erkannt, welch bedeutender Mathematiker er war.