Dezember 2008

Vor 200 Jahren lebte CARL FRIEDRICH GAUSS (30.04.1777 – 23.02.1855)

Bereits zu Lebzeiten wird der in Braunschweig geborene CARL FRIEDRICH GAUSS als *princeps mathematicorum* (Fürst der Mathematiker) bezeichnet – die Zahl seiner mathematischen Entdeckungen ist unfassbar. Seine außergewöhnliche Begabung wird bereits in der Volksschule erkannt. Über den 9-jährigen GAUSS wird berichtet, dass er in kürzester Zeit mit einer Rechenaufgabe fertig ist, die sein Lehrer BÜTTNER der Klasse aufgetragen hat:

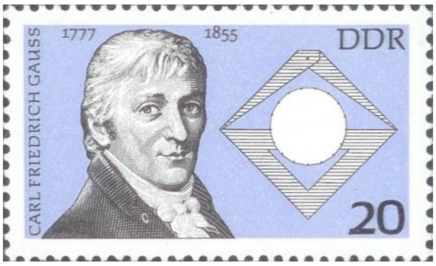
$1+2+3+...+100=5050$

Sein Trick: Von außen nach innen vorgehend, fasst er jeweils die kleinste und die größte Zahl zu einer Summe zusammen: $1+100, 2+99, 3+98, ..., 50+51$; das ergibt 50-mal die Summe 101 ...

Lehrer BÜTTNER spürt, dass er diesem Jungen nicht wirklich etwas beibringen kann, und schenkt ihm ein Schulbuch über Arithmetik, das sich dieser selbstständig erarbeitet. Zusammen mit seinem Schulassistenten MARTIN BARTELS (1769–1836) überzeugt BÜTTNER die (in dieser Hinsicht) überforderten Eltern (der Vater verdient den Lebensunterhalt u. a. als Lehm-Maurer und Haus-Schlachter; die Mutter kann kaum lesen und schreiben), dass ihr Sohn unbedingt in eine höhere Schule wechseln muss. Vom 11. Lebensjahr an besucht GAUSS das Gymnasium Catharineum; mit 14 Jahren wird er dem Herzog CARL WILHELM FERDINAND von Braunschweig vorgestellt, der ihm ein Stipendium gewährt und ihm die Aufnahme eines Studiums am *Collegium Carolinum* (heute: Technische Universität Braunschweig) ermöglicht.

Von 1795 an studiert GAUSS Mathematik, Physik und Klassische Philologie an der Universität zu Göttingen, da diese über eine größere Bibliothek verfügt. Sein Physikprofessor GEORG CHRISTOPH LICHTENBERG (1742-1799) weckt sein lebenslanges Interesse am Experimentieren. Zunächst noch unschlüssig, welchen Studienschwerpunkt er endgültig wählen soll – GAUSS ist in hohem Maße auch sprachbegabt -, gibt schließlich am 30. März 1796 eine geniale Eingebung zu einem Jahrtausende alten geometrischen Problem den Ausschlag ...

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				



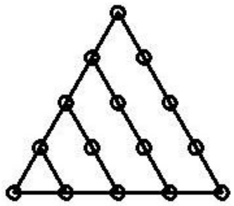
GAUSS erkennt, welche der regelmäßigen Vielecke ausschließlich unter Verwendung von Zirkel und Lineal konstruiert werden können: *Ein reguläres n-Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n eine natürliche Zahl ist, die als Teiler nur Potenzen von 2 oder FERMATsche Primzahlen der Form $p = 2^{2^m} + 1$ hat* ($m \in \mathbb{N}_0$). – Seit der Antike weiß man, wie man reguläre n-Ecke für $n = k \cdot 2^m, m \in \mathbb{N}$, $k \in \{3, 5, 15\}$, konstruieren kann; seitdem gab es keine Fortschritte mehr! Konkret kann GAUSS für $p = 2^{2^2} + 1$, also für das reguläre 17-Eck (vgl. DDR-Briefmarke), eine Konstruktion angeben.

Mit diesem Ereignis beginnt GAUSS damit, ein Tagebuch in lateinischer Sprache zu verfassen („Notizenjournal"), in dem er bis zum Jahr 1814 insgesamt 146 „Entdeckungen" notiert. Diese Notizen werden erst Jahre nach seinem Tod entdeckt und sehr viel später veröffentlicht; viele der Prioritätenstreitigkeiten klären sich zu seinen Gunsten. Beispielsweise weiß man aus den Eintragungen, dass GAUSS sich bereits als Jugendlicher mit den Primzahlen und ihrer Verteilung beschäftigt hat. Vielleicht hat die ständige Benutzung von Logarithmentafeln als Rechen-Hilfsmittel, insbesondere auch das Rechnen mit der Zahl $\ln(10) \approx 2,3$, ihn mit 15 Jahren zu der Vermutung kommen lassen, dass die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen, die kleiner sind als x, proportional zu $x / \ln(x)$ ist – ein Satz, der erst 100 Jahre später exakt bewiesen werden kann.

x	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000
Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen unterhalb von x	4	25	168	1229	9.592	78.498	664.579
$x / \pi(x)$	2,5	4,0	6,0	8,1	10,4	12,7	15,0

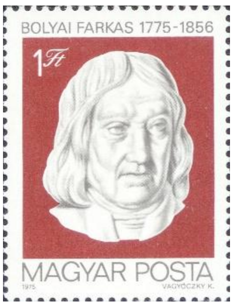
Zuwachs +2,0 +2,1 +2,3 +2,3 +2,3

Auch findet sich ein *ΕΥΡΗΚΑ* (*Heureka – ich habe es gefunden*) in einer der Tagebuch-Aufzeichnungen von 1796 zusammen mit: $num = \Delta + \Delta + \Delta$; er hat gerade einen Beweis der von PIERRE DE FERMAT (1608-1665) aufgestellten Vermutung entdeckt:



Jede positive ganze Zahl lässt sich als Summe von höchstens drei Dreieckszahlen darstellen, wobei die Folge der Dreieckszahlen gegeben ist durch: $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

An der Göttinger Universität freundet er sich mit FARKAS BOLYAI



(1775-1856) an, zu dem er sein ganzes Leben lang Kontakt hält. Sein Studium beendet er ohne Examen; sein Sponsor und Landesvater besteht aber darauf, dass seine Promotion an der „inländischen" Universität von Helmstedt erfolgt.

Diese in lateinischer Sprache verfasste Arbeit von 1799 widmet er in großer Dankbarkeit seinem Landesherrn *Serenissimo Principi ac Domino Carolo Guilielmo Ferdinando*. Sein Doktorvater ist der zu dieser Zeit angesehenste deutsche Mathematiker, JOHANN FRIEDRICH PFAFF (1765–1825).

In seiner Doktorarbeit setzt sich GAUSS kritisch mit einem Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra auseinander, den JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783) veröffentlicht hat, und führt selbst einen strengeren Beweis, allerdings noch unter Vermeidung des Rechnens mit komplexen Zahlen, da diese - seiner Meinung nach - (noch) „kein Bürgerrecht" in der Mathematik haben. Im Laufe seines Lebens erstellt er noch drei weitere Beweise des Satzes (dann aber unter Hervorhebung des Kalküls mit komplexen Zahlen). Der Fundamentalsatz der Algebra besagt: *Jede Gleichung n-ten Grades hat in der Menge der komplexen Zahlen genau n Lösungen.*

Der Herzog gewährt GAUSS auch nach der Promotion einen sicheren Lebensunterhalt, während dieser an den *Disquisitiones arithmeticae* (Untersuchungen über höhere Arithmetik) arbeitet. Nebenbei veröffentlicht er 1800 einen Algorithmus zur Berechnung des Osterdatums, der in der Fassung von 1816 wie folgt lautet:

Aus der Jahreszahl x berechne man einige Hilfsgrößen: $a \equiv x \,(\text{mod}\,19), b \equiv x \,(\text{mod}\,4)$
$c \equiv x \,(\text{mod}\,7), k \equiv x \,(div\,100),\; p \equiv (8k+13)\,(div\,25),\; q \equiv k\,(div\,4), M \equiv (15+k-p-q)\,(\text{mod}\,30)$,
$N \equiv (4+k-q)\,(\text{mod}\,7),\; d \equiv (19a+M)\,(\text{mod}\,30), e \equiv (2b+4c+6d+N)\,(\text{mod}\,7)$.
Ostern fällt dann auf den $(22+d+e)$-ten März. Falls diese Zahl größer ist als 31, muss man 31 abziehen und erhält ein Datum im April. Ausnahmen zur Formel: Wenn $d+e=35$, dann fällt Ostern auf den 19. April, wenn d = 28 und e = 6 und a > 10, dann auf den 18. April.

Die *Disquisitiones* erscheinen mit großen Verzögerungen endlich im Jahr 1801. Jedes einzelne der sieben Kapitel des Buches hätte bereits – für sich genommen – internationales Aufsehen in der Wissenschaftswelt erregt. In seinem Vorwort würdigt GAUSS ausdrücklich seine Vorgänger PIERRE DE FERMAT, LEONHARD EULER (1707–1783), JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) und vor allem auch ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752–1833), dessen Buch *Essai sur la théorie des nombres* aus dem Jahr 1797 sich zeitlich unglücklich mit seinen *Disquisitiones* überschneidet.

Die einzelnen Kapitel beschäftigen sich mit der Theorie des Rechnens mit Kongruenzen, dem Beweis des von LEONHARD EULER (1707–1783) vermuteten *quadratischen Reziprozitätsgesetzes*, mit der Theorie der quadratischen Formen (Lösung von Gleichungen des Typs $ax^2+2bxy+cy^2=m$), mit Kettenbrüchen und mit Primzahltests, mit der Lösung von Gleichungen der Form $x^n=1\,(n\in\mathbb{N})$ sowie $x^m\equiv 1\,(\text{mod}\,p)$.

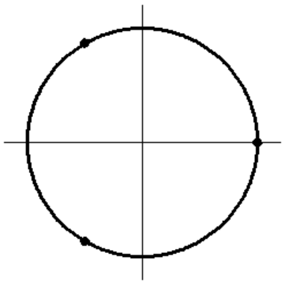
Das *quadratische Reziprozitätsgesetz* beschreibt die Bedingungen, unter denen quadratische Kongruenzgleichungen lösbar sind:

Sind p und q Primzahlen, dann sind die beiden Kongruenzgleichungen $x^2\equiv p\,(\text{mod}\,q)$ und $x^2\equiv q\,(\text{mod}\,p)$ entweder beide lösbar oder beide nicht lösbar, es sei denn, p und q lassen bei der Division durch 4 den Rest 3; in diesem Fall ist die eine Gleichung lösbar, die andere nicht.

Beispiele: (1) Die Gleichung $x^2\equiv 5\,(\text{mod}\,7)$ ist nicht lösbar, d. h., in der Zahlenfolge 5, 12, 19, 26, 33, 40, ... tritt keine Quadratzahl auf, denn die „reziproke" Gleichung $x^2\equiv 7\,(\text{mod}\,5)\equiv 2\,(\text{mod}\,5)$ hat keine Lösung (es gibt keine Quadratzahlen, die 2 oder 7 als Endziffer haben).

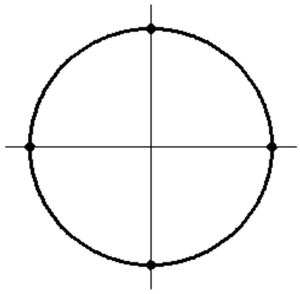
(2) Die Gleichung $x^2 \equiv 5 \,(\mathrm{mod}\, 11)$ ist lösbar, d. h., in der Zahlenfolge 5, *16*, 27, 38, *49*, 60, ... treten offensichtlich Quadratzahlen auf; dann muss auch die „reziproke" Gleichung $x^2 \equiv 11 \,(\mathrm{mod}\, 5) \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 5)$ mindestens eine Lösung haben (es gibt Quadratzahlen, die 1 oder 6 als Endziffer haben). (3) Die Gleichung $x^2 \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 11)$ ist lösbar, d. h., in der Zahlenfolge 3, 14, *25*, *36*, 47, 58, ... kommen Quadratzahlen vor; dann hat die „reziproke" Gleichung $x^2 \equiv 11 \,(\mathrm{mod}\, 3) \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ keine Lösung (d. h., in der Zahlenfolge 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ... tritt keine Quadratzahl auf).

Als *Kreisteilungsgleichungen* werden Gleichungen der Form $x^n = 1$ bezeichnet, weil man ihre n Lösungen auch notieren kann als $x_k = \cos(\frac{k \cdot 2\pi}{n}) + i \cdot \sin(\frac{k \cdot 2\pi}{n})$ mit $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Zeichnet man diese Punkte in der *GAUSSschen Zahlenebene* ein (von GAUSS von den 1820er Jahren an verwendete Veranschaulichung), dann sind dies die Eckpunkte von regelmäßigen n-Ecken auf dem Einheitskreis.



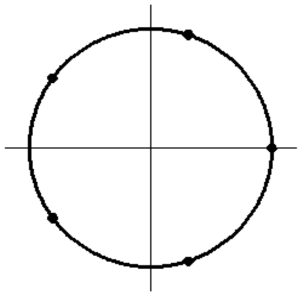
Lösungen von $x^3 = 1$

$x = 1 \vee x = -\frac{1}{2} + \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\vee\, x = -\frac{1}{2} - \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$



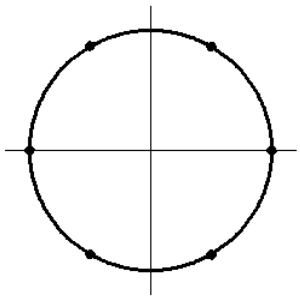
Lösungen von $x^4 = 1$

$x = 1 \vee x = \mathrm{i} \;\vee$
$x = -1 \vee x = -\mathrm{i}$



Lösungen von $x^5 = 1$

$x = 1 \vee$
$x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4} \vee$
$x = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} + \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{4} \vee$
$x = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} - \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{4} \vee$
$x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$



Lösungen von $x^6 = 1$

$x = 1 \vee x = \frac{1}{2} + \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vee$
$x = -\frac{1}{2} + \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vee$
$x = -\frac{1}{2} - \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vee$
$x = \frac{1}{2} - \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

GAUSS ist mit einem Schlag ein berühmter Mann. Einen Ruf nach St. Petersburg lehnt er aus Dankbarkeit dem Herzog gegenüber ab – und hofft, dass dieser ihm in Braunschweig eine Sternwarte baut. Sein besonderes Interesse an astronomischen Fragen ist durch ein Ereignis verstärkt worden, das zu einer weiteren, sensationellen Veröffentlichung führt, durch die er auch unter Nicht-Mathematikern bekannt wird:

Der italienische Astronom GIUSEPPE PIAZZI entdeckt am 1. Januar 1801 den Planetoiden Ceres, verliert aber nach wenigen Tagen dessen Spur, als der Planet „hinter" der Sonne verschwindet. GAUSS berechnet aufgrund der Messdaten PIAZZIs die Bahn des Planetoiden nach der Methode der kleinsten Quadrate und ermöglicht so dessen Wiederentdeckung im folgenden Jahr durch HEINRICH OLBERS. Dieses Verfahren, den Messfehler zu minimieren, indem man die Summe der quadratischen Abweichungen zu einem möglichen Modell betrachtet, hat er sich bereits als 17-Jähriger ausgedacht. Die Theorie hierzu und die Beschreibung der praktischen Anwendung in der Astronomie fasst er 1809 in der Schrift *Motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (Theorie der Bewegung der Himmelskörper, die die Sonne in Kegelschnitten umkreisen) zusammen. Auch hier gibt es wieder einen Prioritätenstreit, da LEGENDRE - unabhängig von GAUSS - 1806 die gleiche Methode vorschlägt.

Als der Herzog von Braunschweig 1807 nach der Schlacht von Jena und Auerstedt, in der er schwer verwundet wird, stirbt, muss GAUSS eine Astronomie-Professur in Göttingen annehmen, um seinen Lebensunterhalt und den seiner neu gegründeten Familie zu sichern. Dass dies mit Lehrverpflichtungen verbunden ist, missfällt ihm, und er sucht stets nach Möglichkeiten, diese vom Umfang her gering zu halten.

Seine glückliche Ehe mit JOHANNA OSTHOFF währt gerade einmal vier Jahre, als diese bei der Geburt des dritten Kindes stirbt. Um die Kinder zu versorgen, heiratet er eine Freundin seiner Frau, MINNA WALDECK, und hat auch mit dieser drei Kinder. Als auch die zweite Frau 1831 stirbt, kümmert sich THERESE, das jüngste seiner Kinder, um den Haushalt, in dem auch seit dem Tod des Vaters im Jahr 1806 die Mutter von GAUSS lebt; diese stirbt 1839 im Alter von 95 Jahren.

Als Leiter der Sternwarte in Göttingen beschäftigt GAUSS sich mit der Verbesserung des Baus von Teleskopen und untersucht, wie man möglichst fehlerfreie Optiken bauen kann. Dabei steht er in vielfältigem Kontakt mit dem Leiter der Sternwarte in Königsberg, FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784–1846).

Im Zusammenhang mit den astronomischen Untersuchungen entdeckt GAUSS, dass zufällige Beobachtungsfehler normalverteilt sind. Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion (GAUSSsche Dichtefunktion $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$) ist eine Glockenkurve, die auf dem 10-DM-Schein (von 1989 bis 2001) abgebildet war.

GAUSS sammelt 1797 erste Erfahrungen bei der Vermessung des Königreichs Westfalen, die dessen Herrscher, König Jerome, ein Bruder NAPOLEONS, durchführen lässt. 1818 übernimmt er nicht nur die Leitung der Vermessung des Königreichs Hannover, sondern er führt sie über 14 Jahre hinweg selbst durch – ohne Rücksicht auf die damit verbundenen körperlichen Strapazen. Er verbessert dabei die Methoden der Geodäsie auf vielfältige Weise: Erfindung des *Heliotrops* (das Sonnenlicht wird mithilfe von Spiegeln in die Richtung des bis zu 100 km entfernten Beobachters gelenkt), Weiterentwicklung der Fehlerrechnung, systematische Lösung von linearen Gleichungssystemen (*GAUSSscher Algorithmus*), Methoden zur möglichst unverzerrten Darstellung mithilfe von Kartenprojektionen (*GAUSSsche Koordinaten*).

Der *GAUSSsche Algorithmus* ist eine Methode zur Lösung eines linearen Gleichungssystems. So kann man beispielsweise das folgende 3×3-Gleichungssystem schrittweise auf Dreiecksgestalt bringen und dann von unten nach oben lösen:

$$\begin{array}{lllll} 1x+2y+1z=+8 & \quad 1x+2y+1z=+8 & \quad 1x+2y+1z=+8 & \quad x=+1 \\ 1x-1y+3z=+8 & \quad -3y+2z=+0 & \quad -3y+2z=+0 & \quad y=+2 \\ 1x-2y-1z=-6 & \quad -1y-4z=-14 & \quad -14z=-42 & \quad z=+3 \end{array}$$

Angeregt durch seine praktischen geodätischen Arbeiten, beschäftigt sich Gauss intensiv mit Fragen der Geodäsie und der Differentialgeometrie, also der Krümmung von Flächen im 3-dimensionalen Raum (*Gausssche Krümmung*) sowie der Flächenbestimmung von gekrümmten Flächen, die mithilfe des *Gaussschen Integralsatzes* berechnet werden können.

Bereits im Geometrieunterricht der Schule kommen ihm erste Zweifel daran, ob die Geometrie des Euklid die einzig mögliche ist. Er vermutet, dass eine der Grundlagen der euklidischen Geometrie, das sogenannte *Parallelenaxiom*, nicht notwendig erfüllt sein muss: Existieren auch Geometrien, bei denen die Winkelsumme im Dreieck nicht gleich $180°$ ist? Später, um 1817, erkennt er, dass sich das Parallelenaxiom nicht aus den ersten vier Postulaten herleiten lässt, und er untersucht die Frage, welche Art von Geometrie sich ergibt, wenn man das fünfte Postulat als nicht gültig ansieht. Er diskutiert seine Ansätze zwar mit seinem Freund Farkas Bolyai, scheut sich aber, seine Überlegungen zu veröffentlichen, hat doch der Philosoph Immanuel Kant wenige Jahre zuvor in seiner *Kritik der reinen Vernunft* in autoritärer Weise festgestellt, dass die Geometrie des Euklid denknotwendig, also unumstößlich wahr, sei. Gauss beschäftigt sich nicht abschließend mit dieser Fragestellung, so dass der russische Mathematiker

Nicolai Iwanowitsch Lobatschewski (1797–1856) und Janos Bolyai (1802-1860), der Sohn von Farkas Bolyai, als Entdecker der nicht-euklidischen Geometrie (die Bezeichnung stammt von Gauss) gelten. Diese entwickeln - unabhängig voneinander - eine „neue" Geometrie ohne das Parallelenaxiom. Zum ersten Mal tritt Janos Bolyai ab 1823 damit an die Öffentlichkeit; Lobatschewski, der im russischen Kasan bei Martin Bartels (dem ehemaligen Lehrerassistenten an der Braunschweiger Volksschule) Mathematik studiert hat, hält 1826 einen Vortrag über eine „imaginäre" Geometrie und verfasst mehrere Aufsätze, die im Westen Europas erst bekannt werden, als ein Beitrag 1837 in französischer Sprache erscheint. Gauss soll im Jahr 1846 über die Entdeckung Bolyais gesagt haben *„Ihn zu loben, würde bedeuten, mich selbst zu loben"*, und über die Veröffentlichung Lobatschewskis, dass er dessen Einsichten bereits 54 Jahren früher gehabt habe. Allerdings ist er von den Arbeiten Lobatschewskis so beeindruckt, dass er dessen Ernennung zum korrespondierenden Mitglied der Königlichen Akademie der Wissenschaften veranlasst, und da das Sprachentalent Gauss im Selbststudium auch Russisch gelernt hat, kann er die Schrift auch im Original lesen.

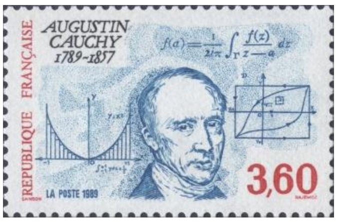
1828 lernt Gauss auf einer Tagung in Berlin den jungen Physiker Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) kennen; es gelingt ihm, diesen für die Übernahme einer Physik-Professur in Göttingen zu gewinnen. Gemeinsam entwickeln die beiden eine Theorie des Magnetismus, erfinden das Magnetometer und nutzen die Möglichkeit der Ablenkung von Kompassnadeln in elektrisch erzeugten Magnetfeldern zur Übertragung von Nachrichten zwischen der Sternwarte und dem physikalischen Institut; allerdings werten sie diese zukunftsträchtige Erfindung des Telegrafen nicht wirtschaftlich aus.

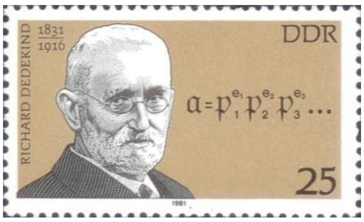
Mit dem angesehenen Naturforscher ALEXANDER VON HUMBOLDT (1769–1859) gründen sie 1836 den „Magnetischen Verein“, die erste internationale Forschungsgemeinschaft, die sich zur Aufgabe setzt, weltweit die zeitlichen und räumlichen Veränderungen des Erdmagnetismus zu erforschen. Das von GAUSS und WEBER entwickelte CGS-System mit den Grundeinheiten Zentimeter (cm), Gramm (g) und Sekunde (s) wird 1881 auf einem wissenschaftlichen Kongress in Paris offiziell eingeführt und die Einheit „GAUSS“ für die magnetische Flussdichte (magnetische Induktion) definiert (1 GAUSS = 10^{-4} TESLA). Eine der Methoden zur Bestimmung des erdmagnetischen Feldes wird heute noch als *GAUSSsche Methode* bezeichnet.

Als WEBER 1837 aus politischen Gründen Göttingen verlassen muss (Entlassung von sieben Göttinger Professoren, darunter auch HEINRICH EWALD, Schwiegersohn von GAUSS, sowie die Brüder JACOB und WILHELM GRIMM, die gegen die Aufhebung der Verfassung durch den neuen König von Hannover protestiert haben), erfolgt die erhoffte öffentliche Stellungnahme von GAUSS nicht, vielleicht wegen dessen prinzipiell konservativ-monarchistischen Einstellung.

1839 verfasst GAUSS eine allgemeine Theorie der Anziehungs- und Abstoßungskräfte (*Potentialtheorie*). In seinen letzten Lebensjahren erstellt er noch ein Gutachten für die Witwenkasse der Göttinger Universität – eine erste Berechnung von Rentenversicherungsbeiträgen auf dem Hintergrund von Sterbetafeln und Wahrscheinlichkeitsüberlegungen.

Als GAUSS 1855 stirbt, hinterlässt er eine gewaltige wissenschaftliche Lebensleistung in vielen Gebieten der Mathematik, der Physik und der Astronomie. Bei Durchsicht seiner Unterlagen und der Tagebücher entdeckt man, dass sich die scheinbare Missachtung der Pionierarbeiten etlicher junger Mathematiker wie NIELS HENRIK ABEL (1802–1829) und JANOS BOLYAI dadurch erklären lässt, dass er deren Entdeckungen lange vor diesen gemacht, aber nichts darüber veröffentlicht hat, weil es ihm noch nicht vollständig erscheint – gemäß seinem Leitspruch „*Pauca sed matura*“ (Weniges, aber Reifes). Nicht für *reif* hält er beispielsweise im Jahr 1811 einen Satz über komplexe Funktionen, dem erst 14 Jahre später von AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857) entwickelten *Hauptsatz der Funktionentheorie*, oder im Jahr 1819 seine Entdeckung der nicht-kommutativen Multiplikation von 4-dimensionalen Objekten, also die von WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805–1865) im Jahr 1843 entdeckten Quaternionen.





Gleichwohl fördert er einige seiner Studenten, wie zuletzt RICHARD DEDEKIND (1831–1916, „*Über die Elemente der Theorie der EULERschen Integrale*“) und BERNHARD RIEMANN (1826–1866, „*Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*“), die von ihm promoviert werden.