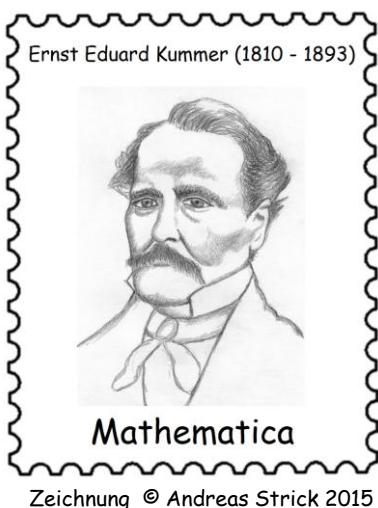


# Februar 2015

Vor 205 Jahren geboren

**ERNST EDUARD KUMMER** (29.01.1810 - 14.05.1893)



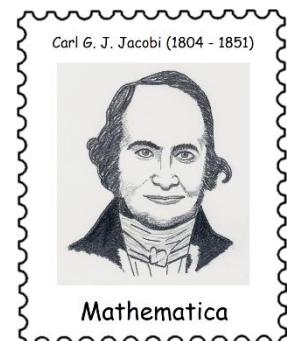
Zeichnung © Andreas Strick 2015

Als 1813 die Reste der „Großen Armee“ NAPOLEONS nach ihrem verlustreichen Russland-Feldzug zurückfluten, darunter auch die wenigen Überlebenden des Truppenkontingents des Königreichs Sachsen, schleppen sie tödliche Seuchen in ihre Heimatländer ein. In Sorau, einer Kleinstadt der damals noch sächsischen Niederlausitz, sorgt sich der Stadtphysicus DR. CARL GOTTHELF KUMMER um die Erkrankten und stirbt selbst an den Folgen einer Typhusinfektion. Seine Witwe nimmt jede Arbeit an, um den beiden Söhnen eine schulische Ausbildung zu ermöglichen. 1828 können sich die Brüder KARL VOLKMAR und ERNST EDUARD KUMMER sogar zum Studium an der Königlichen

Friedrichs-Universität in Halle-Wittenberg einschreiben.

Am Ende des ersten Semesters teilt ERNST EDUARD seiner Mutter mit, dass er den Schwerpunkt seines Studiums von der Theologie auf die Mathematik verlagern möchte - mit dem Ziel, nach Abschluss des Studiums als Lehrer tätig zu werden. 1831 reicht er eine Abhandlung ein, die sich mit der Reihenentwicklung von Potenzen der Sinus- und Kosinusfunktion beschäftigt. Mit dieser Arbeit gewinnt er ein ausgeschriebenes Preisgeld von 50 Talern und wird - wegen der außergewöhnlichen Qualität - sogar zum Dr. phil. promoviert. Noch im selben Monat legt er das Examen als Lehrer für die Fächer Theologie, Philologie, Deutsch, Geschichte, Mathematik und Physik ab.

Nach einjähriger Referendarszeit an seiner ehemaligen Schule in Sorau tritt er im Januar 1833 eine Stelle am Städtischen Gymnasium in Liegnitz (Niederschlesien) an. Seine Tätigkeit als Lehrer wird jedoch schon bald durch die Einberufung zum Militärdienst als Musketier in Breslau unterbrochen. Von dort aus sendet er die Druckfahnen einer Abhandlung über spezielle Differenzialgleichungen 2. Ordnung an CARL GUSTAV JACOB JACOBI, Professor in Königsberg, der überrascht reagiert: „Sieh da, jetzt machen schon preußische Musketiere mit ihren mathematischen Arbeiten den Professoren Concurrenz!“



MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

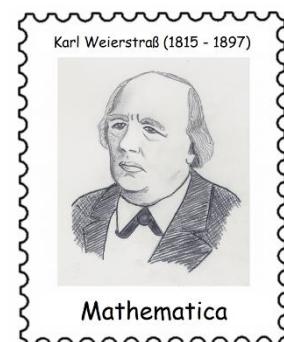
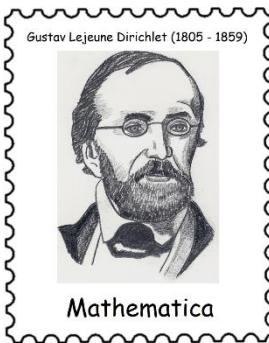
Zehn Jahre lang ist ERNST EDUARD KUMMER als Lehrer für Mathematik und Physik in Liegnitz tätig; zu seinen Schülern gehören FERDINAND JOACHIMSTHAL (1818-1861) und LEOPOLD KRONECKER (1823-1891). In dieser Zeit veröffentlicht er mehrere Beiträge zur Analysis in CRELLES Journal, und auf Empfehlung DIRICHLETS wird er zum korrespondierenden Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften Berlin gewählt.

Über PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET lernt er auch seine spätere (erste) Ehefrau OTTILIE MENDELSSOHN kennen, Enkelin des Philosophen MOSES MENDELSSOHN und Cousine von DIRICHLETS Ehefrau REBECKA. 1840 erfolgt KUMMERS Ernennung zum Gymnasialprofessor. Da hiermit keine Verbesserung der Besoldung verbunden ist, wendet er sich an seine vorgesetzte Behörde mit der dringenden Bitte um eine Gehaltserhöhung, da er sich sonst kaum in der Lage sieht, seine junge Familie zu ernähren.

1842 vollendet KUMMER seine Habilitationsschrift über kubische Reste, Voraussetzung für die Berufung auf eine gerade frei gewordene Stelle an der Universität Breslau. Bald schon verlagert KUMMER den Schwerpunkt seiner Vorlesungen von der Analysis auf die Zahlentheorie. Unter seinen ersten Studenten ist auch sein ehemaliger Schüler LEOPOLD KRONECKER, den er 1845 promovieren kann. 1881 widmet KRONECKER seinen Beitrag in der Festschrift zum 50. Doktor-Jubiläum KUMMERS mit den Worten „.... verdanke ich Dir mein mathematisches Dasein.“

Als 1855 GAUSS stirbt, wird DIRICHLET auf den Lehrstuhl in Göttingen berufen. Für seine Nachfolge in Berlin schlägt er KUMMER vor. Dieser wiederum bringt zur allgemeinen Überraschung für den Lehrstuhl in Breslau weder den allgemein favorisierten KARL WEIERSTRASS noch seinen Schützling KRONECKER ins Gespräch, sondern seinen ehemaligen Schüler JOACHIMSTHAL (dieser ist seit 1853 als Ordinarius in Halle tätig). Aber bald wird klar, welches Ziel er damit verfolgt: Innerhalb eines Jahres werden KRONECKER und WEIERSTRASS auf Lehrstühle in Berlin berufen, wodurch Berlin als Zentrum mathematischer Forschung in eine starke Konkurrenz zu Göttingen tritt. Die Freundschaft und enge Zusammenarbeit dieser drei Mathematiker findet allerdings Mitte der 1870er Jahre nach einer heftigen und unverlöhnlichen Auseinandersetzung zwischen KRONECKER und WEIERSTRASS ein jähes Ende. Zu den Verpflichtungen KUMMERS als Nachfolger von DIRICHLET gehört auch der Unterricht an der Berliner Militärakademie („Kriegsschule“). Im Unterschied zu seinem Vorgänger bereitet ihm diese Lehrtätigkeit, bei der er sich intensiv mit Fragen der Ballistik beschäftigen muss, besondere Freude. Dass er bei diesen Themen auf die Durchführung von Experimenten angewiesen ist, um zu Erkenntnissen zu kommen, beweist seiner Meinung nur, dass die Probleme eben mit mathematischen Methoden allein nicht bewältigt werden können.

Als er 1874 die 19-jährige Lehrtätigkeit an der Militärschule beendet, prüft die zuständige Behörde, ob ihm eine Pension zusteht. KUMMER lehnt eine solche jedoch mit dem Hinweis ab, dass er über die Jahre hinweg den Besoldungsbetrag angespart habe und die Zinsen hieraus so viel ergeben, wie die Pension ausmachen würde.

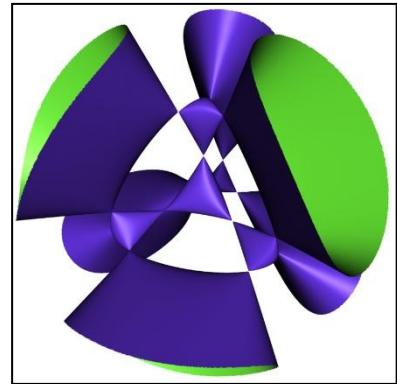


KUMMERS Vorlesungen erfreuen sich wegen seiner Fähigkeit, schwierige Gedankengänge klar strukturiert, verständlich und humorvoll vorzutragen, großer Beliebtheit. Bis zu 250 Studenten besuchen seine Veranstaltungen - eine für die damalige Zeit ungewöhnlich große Anzahl. In seiner Berliner Zeit kann er 39 Studenten promovieren, darunter GEORG CANTOR und HERMANN AMANDUS SCHWARZ.

15 Jahre lang nimmt KUMMER das Amt als Sekretär der mathematisch-physikalischen Abteilung der Akademie der Wissenschaften in Berlin wahr; er ist zeitweise Dekan und Rektor der Universität. Als er 1883 den Eindruck hat, dass sein Gedächtnis nachlässt (niemand außer ihm hat davon etwas bemerkt), entschließt er sich, seine Tätigkeit als Hochschullehrer zu beenden. Sein Nachfolger wird LAZARUS FUCHS, bei dessen Habilitation KUMMER als Gutachter tätig war.

Die zahlreichen Beiträge KUMMERS zur Entwicklung der Mathematik kann man drei Schaffensperioden zuordnen: In den ersten Jahren beschäftigt er sich intensiv mit Problemen aus der Funktionentheorie, in einer zweiten vor allem mit zahlentheoretischen Fragen und am Ende seiner Forschungstätigkeit insbesondere mit Problemen der algebraischen Geometrie - die Abbildung rechts zeigt eine sogenannte KUMMER'sche Fläche.

(Quelle: Wikipedia)

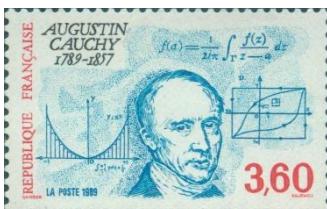


Seit der folgenreichen Randbemerkung FERMATS auf dem Rand einer DIOPHANT-Übersetzung „*Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*“ (Ich habe einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, aber dieser Rand ist zu schmal, ihn zu fassen.) hatte die FERMAT'sche Vermutung (in der Fachliteratur meistens mit *FLT* abgekürzt - *FERMAT's last theorem*) viele bedeutende und weniger bedeutende Mathematiker beschäftigt:

Die Gleichung  $x^n + y^n = z^n$  mit  $x, y, z \in \mathbb{N}$  hat keine Lösung für natürliche Zahlen  $n > 2$ .



FERMAT selbst hatte nur den Fall  $n=4$  beweisen können. EULER legte 1753 einen Beweis für  $n=3$  vor, und DIRICHLET präsentierte 1825 der Académie des Sciences einen Beweisansatz für  $n=5$ , der mit Unterstützung von LEGENDRE vervollständigt werden konnte.



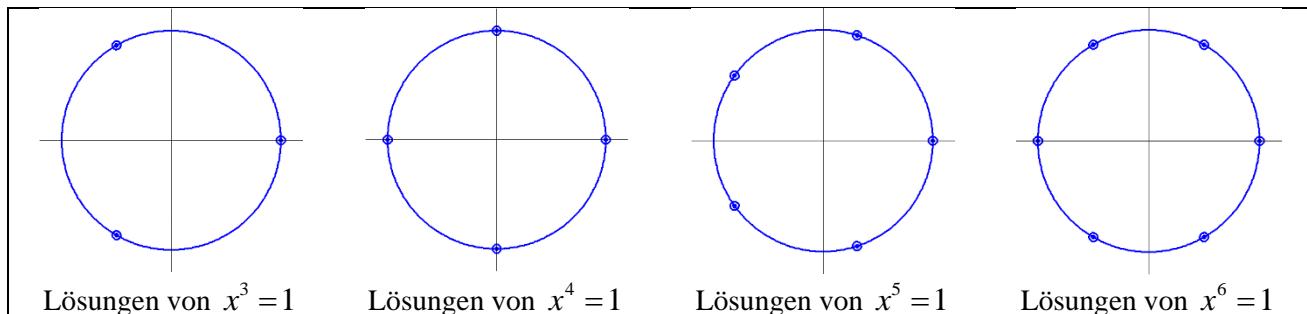
1847 kündigt der französische Mathematiker GABRIEL LAMÉ der Académie an, einen Beweis für alle Primzahlen gefunden zu haben. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY reagiert eifersüchtig auf die Ankündigung und behauptet seinerseits, dass er unmittelbar vor der Vollendung des Beweises stehe. Beide Mathematiker machen Andeutungen, wie ihnen der entscheidende Schritt des Beweises gelungen sei.

Durch seine regelmäßige Korrespondenz mit JOSEPH LIOUVILLE erfährt auch KUMMER hiervon, weiß sofort, welcher Fehler beiden Mathematikern unterlaufen ist, und informiert LIOUVILLE hierüber. An wesentlicher Stelle des Beweises benutzen nämlich beide die allgemeine Gültigkeit des Fundamentalsatzes der Arithmetik, ein Satz, der seit EUKLID für natürliche Zahlen als gültig angesehen, aber erst durch CARL FRIEDRICH GAUSS in seinen *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) vollständig bewiesen worden ist. Der Satz besagt, dass die Zerlegung natürlicher Zahlen in Primfaktoren (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig ist.

Beispielsweise gilt für die Zahl 6, dass sie sich in der Menge  $\mathbb{N}$  nur als Produkt der Primzahlen 2 und 3 darstellen lässt. In der Menge  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i] = \{a + b\cdot\sqrt{5}i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  existiert jedoch noch eine weitere Zerlegung, nämlich die Darstellung als Produkt  $(1+\sqrt{5}i) \cdot (1-\sqrt{5}i)$ ; und beide Faktoren lassen sich selbst nicht weiter zerlegen.

KUMMER war 1844 auf dieses Phänomen bei der Untersuchung von Lösungen der Kreisteilungsgleichungen gestoßen, das sind Gleichungen der Form  $x^n = 1$ . Nach dem von GAUSS bewiesenen Fundamentalsatz der Algebra besitzt jede Gleichung  $n$ -ten Grades in der Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen genau  $n$  Lösungen.

In der GAUSS'schen Zahlebene sind die Lösungen von  $x^n = 1$  Punkte des Einheitskreises und Eckpunkte von regelmäßigen  $n$ -Ecken mit den Koordinaten  $(\cos(\frac{2\pi k}{n}); \sin(\frac{2\pi k}{n}))$  mit  $0 \leq k < n, k \in \mathbb{N}$ .



Mithilfe von  $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{n})$ , der  $n$ -ten Einheitswurzel, lassen sich die  $n$  Lösungen auch in der Form  $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}$  notieren, wobei gilt:  $1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{n-1} = 0$  sowie  $\zeta^n = 1$ . Für ungerade Primzahlen  $n$  kann man dann die Summe  $x^n + y^n$  als Produkt  $(x+y) \cdot (x+\zeta \cdot y) \cdot (x+\zeta^2 \cdot y) \cdots \cdot (x+\zeta^{n-1} \cdot y)$  schreiben. Wenn nun in der Menge der Zahlen der Form  $a_0 + a_1 \cdot \zeta + a_2 \cdot \zeta^2 + \dots + a_{n-1} \cdot \zeta^{n-1}$  mit  $a_i \in \mathbb{Z}$  auch die Eindeutigkeit der Faktorzerlegung gelten würde, dann könnte man die Existenz weiterer Zerlegungen ausschließen. KUMMER entdeckt, dass dies z. B. für  $n=23$  nicht der Fall ist.

Um dennoch das Argument der eindeutigen Zerlegbarkeit nutzen zu können, führt KUMMER sogenannte *ideale Zahlen* ein. Im o. a. Beispiel der Zerlegung der natürlichen Zahl 6 muss die betrachtete Zahlenmenge um die *idealnen Zahlen*  $\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}$  ergänzt werden; dann ergibt sich, dass die vermeintlich unterschiedlichen Produktdarstellungen der Zahl 6 übereinstimmen:

$$6 = 2 \cdot 3 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}i}{\sqrt{2}} \right) = (\sqrt{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}) \cdot (\sqrt{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}) = (1 + \sqrt{5} \cdot i) \cdot (1 - \sqrt{5} \cdot i)$$

1850 gelingt es KUMMER, die Gültigkeit des FLT für eine sehr große Anzahl von Exponenten zu zeigen, nämlich für alle regulären Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, ... und deren Vielfache. (Eine Primzahl  $p$  ist regulär, wenn  $p$  keinen der Zähler der BERNOULLI-Zahlen  $B_2, B_4, B_6, \dots, B_{p-3}$  teilt.) Offen bleibt die Gültigkeit des Satzes für die unendlich vielen irregulären Primzahlen 37, 59, 67, 101, 103, ... .

Nachdem die Académie des Sciences mehrfach vergeblich ein Preisgeld für die Lösung des Problems ausgeschrieben hat, spricht sie 1857 KUMMER – ohne dessen Bewerbung – das Preisgeld als Anerkennung für seine Verdienste zu. Dass noch einmal 138 Jahre vergehen würden, bis das Problem endgültig als gelöst angesehen werden kann, ahnt damals niemand ...

