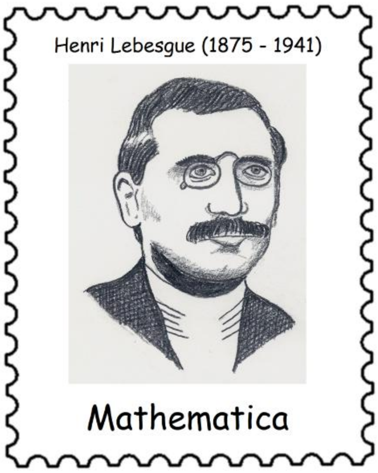
Juni 2013

Vor 138 Jahren geboren **HENRI LÉON LEBESGUE** (28.06.1875 – 26.07.1941)



Zeichnung © Andreas Strick 2013

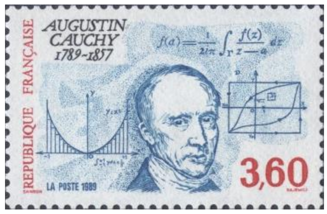
HENRI LÉON LEBESGUE ist erst drei Jahre alt, als sein Vater und seine beiden Schwestern an Tuberkulose sterben. Die Mutter nimmt alle Mühen auf sich, um den Lebensunterhalt zu sichern und dem Jungen eine möglichst gute Ausbildung zu gewährleisten. Schon in der Grundschulzeit erkennen die Lehrer die besondere Begabung des Jungen. Ein Stipendium seiner Heimatstadt Beauvais (Picardie) ermöglicht ihm den Wechsel an ein Lyceum in Paris. Nach Besuch der *classe préparatoire* am *Lycée* LOUIS-LE-GRAND, das so berühmte Mathematiker wie ÉVARISTE GALOIS, HENRI POINCARÉ und CHARLES HERMITE hervorgebracht hat, studiert er ab 1894 an der *École Normale Supérieure*. 1897 besteht er dort die Zulassungsprüfung als Lehrer für den Unterricht in den oberen Klassen des Lyceums (*agrégation*), arbeitet zunächst noch zwei Jahre in der Bibliothek der Hochschule, bevor er für drei Jahre als Lehrer an ein Lyceum in Nancy geht.

In dieser Zeit verfasst LEBESGUE die beiden Schriften, durch die er berühmt wird: *Sur une généralisation de l'intégrale définie* (*Über eine Verallgemeinerung des bestimmten Integrals*) und seine Doktorarbeit *Intégrale, Longueur, Aire* (*Integral, Länge, Fläche*).

Nach seiner Promotion im Jahr 1902 übernimmt er – so wie es in Frankreich üblich ist – zunächst Lehraufträge als Dozent an Universitäten in der Provinz, in Rennes und Poitiers, bevor er 1910 an die *Sorbonne* wechseln kann. 1921 wird er zum Professor für Mathematik am *Collège de France* ernannt, jener besonderen Einrichtung in Paris, die als *Grand Établissement* das höchste Ansehen in Frankreich genießt. Dozenten an diesem *Collège* haben den Auftrag, *das Wissen in seiner Entstehung zu lehren* (*enseigner le savoir en train de se faire*), also Grundlagenforschung zu betreiben. Außerdem hält er bis 1937 regelmäßig Vorlesungen an der *ENS* (*École Normale Supérieure*).

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

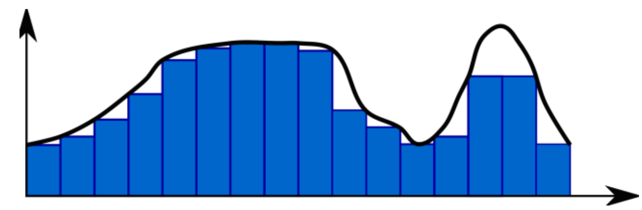
Bereits Archimedes hatte sich mit der Frage beschäftigt, Maßzahlen von Flächen zu bestimmen, die von gewissen Kurven begrenzt werden. Mithilfe genialer Methoden bestimmte er u. a. Flächen unter Parabeln. Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz entdeckten den Zusammenhang zwischen dem Tangenten- und dem Flächenproblem und formulierten den *Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung*, der im Wesentlichen besagt, dass die Integralfunktion F einer über einem abgeschlossenen Intervall I stetigen Funktion f differenzierbar ist und dass deren Ableitung gleich der integrierten Funktion f ist.



Die Begriffsbildungen und Beweise hierzu wurden erst durch Augustin Cauchy eingebracht. Bernhard Riemann schließlich entwickelte den Begriff der *Integrierbarkeit einer Funktion*, indem er das Intervall in Teilintervalle zerlegte und Flächeninhalte von Treppenfiguren untersuchte, also Summen der Form $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\left(x_i - x_{i-1}\right)$ mit in den Teilintervallen liegenden Zwischenstellen t_i. Wenn sich die Summen bezüglich beliebiger Zerlegungen und unabhängig von den gewählten Zwischenstellen einer festen Zahl nähern, ergibt sich das Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Angeregt durch Veröffentlichungen von Émile Borel, Professor an der *École Normale Supérieure*, setzt sich Lebesgue in seiner Doktorarbeit mit dem Problem der *Messbarkeit* von Mengen auseinander und kommt so zu einer neuen Definition der Integrierbarkeit.

Während bei Riemann der Definitionsbereich einer Funktion im Vordergrund steht, geht Lebesgue vom Wertebereich der Funktion aus und unterteilt diesen in Teilintervalle. Eine Näherung des Lebesgue-Integrals ergibt sich dadurch, dass man die Flächeninhalte der Rechtecke bestimmt, deren *Breite* sich aus der Breite eines Teilintervalls der Wertemenge ergibt und deren *Höhe* durch die Gesamtlänge der zugehörigen Intervalle des Definitionsbereichs bestimmt ist.



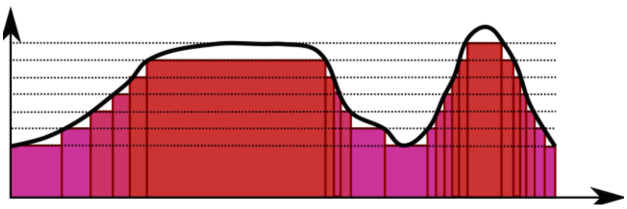


Abb. Wikipedia Stichwort: Lebesgue-Integral

Lebesgue erklärt diese Vorgehensweise in anschaulicher Weise so: *Angenommen, ich muss einen bestimmten Betrag bezahlen; ich durchsuche meine Taschen und finde dort Münzen und Geldscheine von unterschiedlichem Wert. Ich gebe sie an meinen Gläubiger in der Reihenfolge, in der ich sie finde, solange, bis ich den Gesamtbetrag meiner Schulden erreicht habe. Das ist das Integral von Riemann. Aber ich kann auch anders vorgehen. Wenn ich das gesamte Geld (aus meinen Taschen) herausgenommen habe, lege ich die Geldscheine von gleichem Wert aufeinander, bei den Münzen verfahre ich ebenso, und ich leiste meine Zahlung, indem ich die Zahlungsmittel von gleichem Wert jeweils gemeinsam übergebe. Das ist mein Integral.*

Die Vorgehensweise von Lebesgue stellt eine Erweiterung der Methode von Riemann dar: Jede über einem beschränkten Intervall Riemann-integrierbare Funktion ist auch Lebesgue-integrierbar, aber es gibt Lebesgue-integrierbare Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind. Ein Beispiel hierfür ist die *Dirichlet-Funktion* D über dem Intervall $[0;1]$, die für alle reellen Zahlen definiert ist durch $D(x)=1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $D(x)=0$ für $x \notin \mathbb{Q}$. Diese Funktion ist an jeder Stelle des Definitionsbereichs unstetig. Sie ist nicht Riemann-integrierbar, weil die Grenzwerte der Folge der Untersummen bzw. Obersummen nicht übereinstimmen. Mit dem Ansatz von Lebesgue ergibt sich für das Intervall $[0;1]$ der Integralwert *null*.

Man könnte es überspitzt auch so formulieren: Wenn man von den abzählbar unendlich vielen rationalen Ausnahmen absieht, handelt es sich bei der Dirichlet-Funktion im Wesentlichen um die konstante Funktion vom Wert *null*; daher ist das Integral über dem Intervall ebenfalls gleich *null*.

Die Lebesgue'schen Ideen zur Verallgemeinerung des Integralbegriffs finden nicht überall den Beifall der Mathematiker, insbesondere nicht in Frankreich. Charles Hermite beispielsweise äußert seine grundsätzliche Abneigung gegen die Beschäftigung mit Funktionen, die nur durch „komplizierte" Vorschriften definiert werden können: *Ich wende mich mit Entsetzen und Abscheu von dieser beklagenswerten Plage von Funktionen, die überhaupt keine Ableitungen haben.*

In den Folgejahren setzen sich jedoch immer mehr Mathematiker mit den Lebesgue'schen Ansätzen auseinander, auch für „komplizierte" Mengen ein Maß zu finden, u. a. Constantin Carathéodory, der die Theorie weiterentwickelt.

Die Doktorarbeit von Lebesgue kann als Beginn eines neuen Teilgebiets der Mathematik, der *Maßtheorie*, angesehen werden; deren Entwicklung erweist sich auch als bedeutsam für die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Das Banach-Tarski-Paradoxon aus dem Jahr 1924 zeigt, welche Probleme bei nicht-messbaren Mengen auftreten können: *Eine Kugel kann so in endlich viele nicht-messbare Teilmengen zerlegt werden, dass aus diesen durch Kongruenzabbildungen zwei identische Kopien des Originals zusammengefügt werden können, das Volumen also scheinbar „verdoppelt" wird.*

Allein bis zu seiner Aufnahme in die *Académie française* im Jahr 1922 verfasst Henri Lebesgue über 90 Schriften zur Maß- und Integrationstheorie; auch danach folgen viele weitere Veröffentlichungen, auch zu anderen Gebieten der Mathematik. Im Laufe der Jahre erfährt er zahlreiche Ehrungen durch ausländische Akademien. Bei seinen Studenten ist er beliebt und angesehen – sein Lehrprinzip: *Für einen Lehrer gibt es – nach meiner Meinung – nur eine mögliche Art, Unterricht zu erteilen, nämlich vor den Schülern zu denken (… penser devant ses élèves)*. In einem Nachruf schreibt der französische Mathematiker Paul Montel: *Er war ein großer Gelehrter, ein bewundernswerter Lehrer, ein Mensch von unvergleichlichem moralischen Adel. Sein Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik wird noch lange Zeit anhalten – durch seine eigenen Werke und durch solche, die er angeregt hat.*