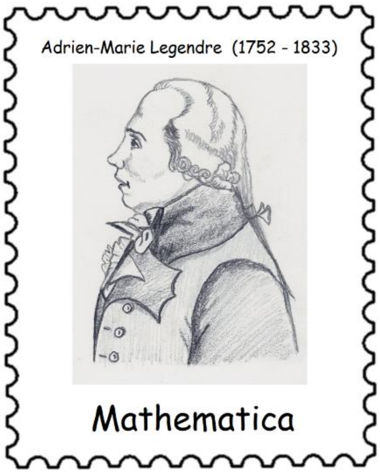
November 2013

Vor 200 Jahren lebte **Adrien-Marie Legendre** (18.09.1752 – 10.01.1833)



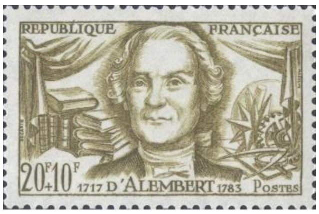
Zeichnung © Andreas Strick 2013

Wenn die französische Postverwaltung im Jahr 2002 aus Anlass des 250. Geburtstages von Adrien-Marie Legendre eine Briefmarke herausgegeben hätte, dann wäre vermutlich auf dieser das links zu sehende Porträt abgebildet worden. Erst kürzlich hat sich herausgestellt, dass das bekannte Porträt nicht den Mathematiker Adrien-Marie Legendre zeigt, sondern einen Zeitgenossen, den Politiker Louis Legendre, Mitglied der Gruppe der *Montagnards* um Danton, Marat und Robespierre. Wie diese Verwechslung geschehen konnte, ist heute nicht mehr nachzuvollziehen. Vielleicht hängt es mit der Bescheidenheit Adrien-Marie Legendres zusammen, der auf eine Porträtierung keinen Wert legte. Als man viele Jahre nach seinem Tod nach einer Abbildung suchte, fand man eine, die mit „Legendre" beschriftet war, und da war der Politiker, der 1797 ums Leben kam, längst vergessen …

So existiert nur eine Karikatur aus dem Jahr 1820 von Julien-Léopold Boilly, der die Mitglieder des *Institut de France* zeichnete.

(Quelle: englische Wikipedia-Seite)

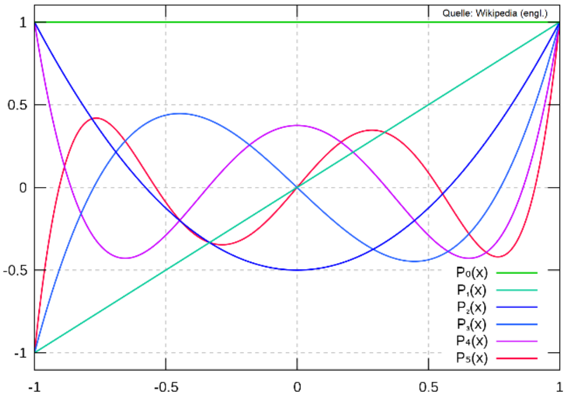
Über Legendres Kindheit weiß man nur wenig: Er stammt aus einer wohlhabenden Familie; in Paris besucht er das *Collège Mazarin* und verteidigt dort im Jahr 1770 seine Dissertation in Mathematik und Physik.



Von 1775 bis 1780 unterrichtet er – aufgrund einer Empfehlung von d'Alembert – zusammen mit Pierre-Simon Laplace an der *École Militaire*. 1782 nimmt er an einem wissenschaftlichen Wettbewerb der *Preußischen Akademie der Wissenschaften* teil. Mit seinem Beitrag *Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux résistants* (Untersuchungen über die Flugbahn von Geschossen unter Berücksichtigung des Luftwiderstands) gewinnt er den ausgeschriebenen Preis und damit auch die Aufmerksamkeit von Joseph-Louis Lagrange, der zu dieser Zeit noch der Direktor der Berliner Akademie ist.

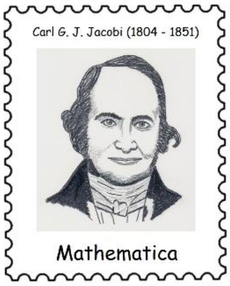
MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

1783 legt er der *Académie des Sciences* in Paris seine Untersuchungen über die Anziehungskraft von ellipsoid-förmigen Körpern vor, was nach der begeisterten Beurteilung durch LAPLACE dazu führt, dass LEGENDRE Kandidat für eine Mitgliedschaft in der *Académie* wird. Im darauffolgenden Jahr ergänzt er das Papier durch *Recherches sur la figure des planètes*. In beiden Beiträgen führt er eine Klasse von Polynomen ein, die man heute als *LEGENDRE-Polynome* P_n bezeichnet.

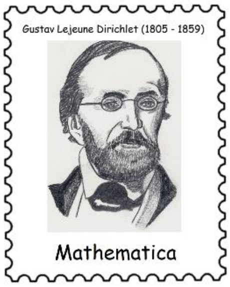


Diese haben die bemerkenswerte Eigenschaft: $\int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot P_m(x)\,dx = 0$ für $m \neq n$, sodass man die Polynome bzgl. eines so definierten Skalarprodukts als zueinander orthogonal bezeichnet.

Außerdem beschäftigt sich LEGENDRE mit den Integralen von Funktionen, die als Quadratwurzeln aus Polynomen $3.$ und $4.$ Grades dargestellt werden können; da diese auch bei der Bogenlängenbestimmung von Ellipsen auftreten, bezeichnet er die gesamte Klasse (irreführend) als *elliptische Funktionen* (*Mémoire sur les intégrations par d'arcs d'ellipse*, 1786). Im Laufe der nächsten Jahrzehnte gelingen ihm immer wieder Fortschritte, u. a. kann er die Probleme auf drei Normalformen reduzieren.



Viele Jahre verbringt er damit, Tabellen zu erstellen, um die Werte dieser (nicht elementar integrierbaren) Integralfunktionen näherungsweise zu bestimmen. Als er, der über 30 Jahre konkurrenzlose Experte auf diesem Gebiet, 1825 bis 1828 eine letzte Bearbeitung der *Traité des fonctions elliptiques* vornimmt, muss er einsehen, dass die Arbeit der zurückliegenden Jahre durch die Arbeiten von ABEL und JACOBI überflüssig geworden ist.



1785 veröffentlicht LEGENDRE ein Papier zur Zahlentheorie. Es enthält u. a. zwei wichtige Ergebnisse seiner Untersuchungen; seine Beweise enthalten jedoch Lücken und sogar Fehler.

Für arithmetische Folgen stellt er eine Vermutung auf: Sind $a, m \in \mathbb{N}$ zueinander teilerfremd, dann enthält jede arithmetische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a + m\cdot n$ unendlich viele Primzahlen als Glieder. Erst DIRICHLET gelingt 1837 der Beweis – dieser Satz wird daher gewöhnlich als *DIRICHLET'scher Primzahlsatz* zitiert, meist ohne die Verdienste LEGENDREs zu erwähnen. – An anderer Stelle des Papiers beschäftigt sich LEGENDRE mit dem von EULER vermuteten *Quadratischen Reziprozitätsgesetz*:

Sind p und q voneinander verschiedene ungerade Primzahlen, dann sind die beiden Kongruenzgleichungen $x^2 \equiv p \pmod q$ und $x^2 \equiv q \pmod p$ entweder beide lösbar oder beide nicht lösbar, es sei denn, p und q lassen bei der Division durch 4 den Rest 3; in diesem Fall ist die eine Gleichung lösbar, die andere nicht.

Bei der Formulierung des Satzes verwendet man heute noch die Schreibweise von LEGENDRE, das sogenannte LEGENDRE-Symbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ für ganze Zahlen a und Primzahlen p.

Man schreibt $\left(\frac{a}{p}\right)=1$, wenn a ein quadratischer Rest modulo p ist, d. h., wenn die Gleichung $x^2 \equiv a \pmod{p}$ in $\mathbb{Z}$ lösbar ist. Die Gleichung $x^2 \equiv 2 \pmod{7}$ z. B. besitzt die Lösungen 3 und 4; daher schreibt man $\left(\frac{2}{7}\right)=1$. Wenn a kein quadratischer Rest modulo p ist, d. h., wenn die Gleichung $x^2 \equiv a \pmod{p}$ keine Lösung in $\mathbb{Z}$ hat, notiert man dies als $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$. Die Gleichung $x^2 \equiv 5 \pmod{7}$ z. B. ist in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar; daher schreibt man $\left(\frac{5}{7}\right)=-1$. Wenn a ein Vielfaches von p ist, gilt $\left(\frac{a}{p}\right)=0$.

Das *Quadratische Reziprozitätsgesetz* lässt sich für ungerade Primzahlen p, q mithilfe des LEGENDRE-Symbols dann wie folgt notieren:

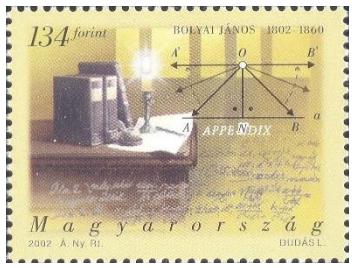
$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{1}{4}\cdot(p-1)\cdot(q-1)}.$$

1787 wird LEGENDRE als neues Mitglied der *Académie* damit beauftragt, die Vermessungsergebnisse der Observatorien in Paris und Greenwich aufeinander abzustimmen; in Anerkennung seiner Verdienste wird er auch von der *Royal Society* als Mitglied aufgenommen. Im selben Jahr veröffentlicht er eine Schrift, die sich mit den Fehlern und notwendigen Korrekturen bei trigonometrischen Vermessungen beschäftigt.

Als 1793 der französische Nationalkonvent das *Meter* als verbindliche Längeneinheit einführt, definiert als der 10-millionste Teil des *Pariser Meridians* (= durch Paris verlaufender Viertelkreisbogen vom Nordpol zum Äquator), beruht dies auf den Daten, mit deren Koordination er beauftragt war. In den folgenden Jahren arbeitet LEGENDRE an verantwortlicher Stelle mit bei dem Projekt, Logarithmentafeln zur Basis 10 und zugehörige Tafeln trigonometrischer Funktionen zu erstellen.

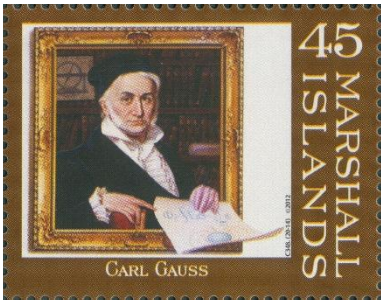
Durch die Wirren der französischen Revolution verliert LEGENDRE, gerade frisch verheiratet, sein gesamtes ererbtes Vermögen, und als die *Académie des Sciences* aufgrund eines Beschlusses des Nationalkonvents geschlossen wird, steht er vorübergehend mittellos da. Nach der Neugründung der *Académie des Sciences* im Jahr 1795 als *Institut National des Sciences et Arts* ist LEGENDRE einer der sechs Vertreter des Fachbereichs Mathematik.

CONDORCET ermuntert ihn dazu, die *Elemente* des EUKLID neu zu ordnen und zu vereinfachen. Über 100 Jahre lang wird an französischen Schulen die Geometrie nach seinen *Eléments de géometrie* unterrichtet; Übersetzungen des Buches erscheinen auch in anderen Ländern. In einer der letzten von ihm herausgegebenen Auflagen ergänzt er die Ausführungen durch einfache Beweise dafür, dass weder π noch π^2 rationale Zahl sind; ohne Beweis äußert er die Vermutung, dass π nicht Lösung einer algebraischen Gleichung sein kann, was erst im Jahr 1882 durch FERDINAND LINDEMANN bewiesen wird.



Jahrzehntelang setzt sich LEGENDRE mit dem Parallelenaxiom auseinander. 1832, in dem Jahr, in dem JÁNOS BOLYAI seinen Beitrag zur nicht-euklidischen Geometrie veröffentlicht, äußert er seine Überzeugung, dass der Satz über die Winkelsumme im Dreieck (äquivalente Formulierung des Parallelenaxioms) zu den fundamentalen Wahrheiten gehört, die nicht bewiesen werden können und ein unumstößliches Beispiel mathematischer Gewissheit darstellt.

1806 veröffentlicht Legendre ein Buch über die Berechnung der Bahn von Kometen, die er als parabelförmig annimmt. Er erläutert dann, wie man aus drei Beobachtungen in gleichen Zeitintervallen die gesuchten Parameter der Kometenbahn ermitteln kann.
Dabei verwendet er die *Methode der kleinsten Quadrate*, um die Fehler zu minimieren. Als Gauss 1809 seine Herleitung der Methode veröffentlicht, beansprucht dieser das Prioritätsrecht für sich – trotz seiner Kenntnis der Legendre'schen Veröffentlichung. Vergeblich versucht Legendre andere Mathematiker auf die Tatsache hinzuweisen, dass seine Veröffentlichung zuerst erfolgte.
1798 veröffentlicht Legendre eine zusammenfassende Darstellung seiner Untersuchungen zu den Eigenschaften von Zahlen *Essai sur la théorie des nombres*, das erste Buch, in dem der Begriff *Zahlentheorie* im Buchtitel steht. Der damals erst 21-jährige Gauss bemerkt die Lücken in Legendres Beweis zum Quadratischen Reziprozitätsgesetz. Als er selbst im Jahr 1801 in den *Disquisitiones Arithmeticae* einen ersten lückenlosen Beweis des Satzes präsentiert, beansprucht er den Satz *für sich*, ohne Legendre und dessen Vorleistungen zu erwähnen. Im Laufe seines Lebens liefert Gauss zwar noch fünf weitere, unterschiedliche Beweise des Satzes, aber bis zu seinem Tod beklagt Legendre die unglaubliche Respektlosigkeit eines Mannes, der eigentlich doch selbst so viele Verdienste erworben hat, dass er Entdeckungen anderer nicht als seine ausgeben muss.



Als Legendre 1808 seine *Théorie des nombres* neu herausgibt, hat er keine Probleme damit, den Gauss'schen Beweis vollständig abzudrucken und dessen Verdienste zu würdigen. Die Neubearbeitung enthält auch eine Abschätzung der Anzahl $\pi(n)$ der Primzahlen, die kleiner als eine natürliche Zahl n sind: $\pi(n) \approx \frac{n}{\log(n)-1{,}08366}$. Erneut beansprucht Gauss, dass er dieses Gesetz der asymptotischen Näherung bereits *vor* Legendre gefunden hat, und wiederum akzeptiert er nicht, dass beide ihre Entdeckungen parallel und unabhängig voneinander gemacht haben. Die Legendre'sche Vermutung, dass zwischen zwei aufeinander folgenden natürlichen Quadratzahlen n^2 und $(n+1)^2$ mindestens eine Primzahl existiert, ist bis heute weder bewiesen noch widerlegt.
Als 1825 Dirichlet, ein unbekannter deutscher Student, in der *Académie* einen Beweis der Fermat'schen Vermutung für den Fall $n=5$ vorträgt, schließt Legendre die noch vorhandene Lücke im Beweis. Mit großer Freundlichkeit fördert er das junge Talent, ebenso wie er mit Begeisterung die Fortschritte kommentiert, die Abel und Jacobi erzielen. – Legendre gehört ohne Zweifel zu den bedeutendsten französischen Mathematikern – seinen Namen findet man, in goldenen Lettern geschrieben, unter den 72 Namen berühmter Franzosen auf einem Fries am Eiffel-Turm in Paris. In der Geschichte der Mathematik nimmt er jedoch eine tragische Zwischenrolle ein. In der Zahlentheorie werden viele seiner Beiträge bereits vom jungen Gauss übertroffen, bei den elliptischen Integralen werden seine Erkenntnisse durch die erheblich weitergehenden Theorien von Abel und Jacobi abgelöst.
Seine letzten Lebensjahre verbringt Legendre in seinem Haus in Auteuil, krank und verarmt – seit dem Jahr 1824, als er einem Kandidaten der Regierung seine Zustimmung verweigert hat, erhält er keine Pension mehr.