

Mai 2020

Vor 270 Jahren geboren **LORENZO MASCHERONI** (13.05.1750 - 14.07.1800)

LORENZO MASCHERONI wurde als Mathematiker vielleicht nicht so berühmt wie etliche seiner Zeitgenossen, aber zwei seiner Veröffentlichungen waren immerhin so bedeutend, dass sein Name untrennbar mit zwei Gebieten der Mathematik verbunden ist.

- Die **EULER-MASCHERONI-Konstante** $\gamma = 0,577215\dots$ ist der Grenzwert der Folge $H_n - \ln(n)$, also der Folge, durch die die Partialsummen der harmonischen Reihe mithilfe des Logarithmus der zugehörigen natürlichen Zahl näherungsweise bestimmt werden können.
- Der Satz von **MOHR-MASCHERONI** besagt, dass jede Konstruktion, die mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden kann, sogar alleine mit dem Zirkel möglich ist.



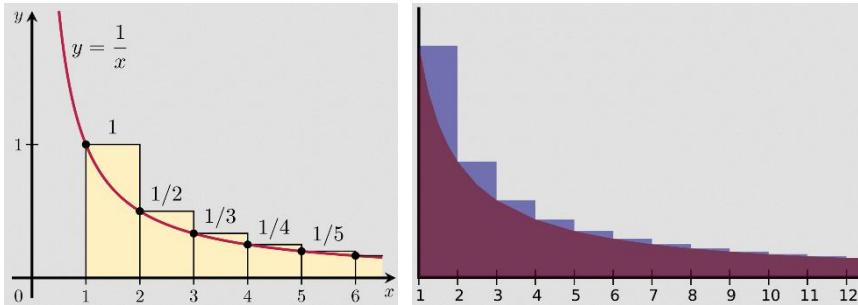
LORENZO MASCHERONI wird als Sohn eines reichen Landbesitzers in Bergamo (Lombardia, damals zur Republik Venedig gehörend) geboren. Mit 17 Jahren wird er dort zum Priester geweiht, mit 20 Jahren lehrt er Rhetorik am *Seminario di Bergamo*, von 1778 an Mathematik und Physik am *Collegio Mariano*.

1785 veröffentlicht er ein Werk zur Statik: *Nuove ricerche su l'equilibrio delle volte* (Neue Untersuchungen über das Gleichgewicht von Gewölben), woraufhin er von der Universität von Pavia auf den Lehrstuhl für Algebra und Geometrie berufen wird. Von 1789 bis 1793 nimmt er das Amt eines Rektors der Universität wahr.

1790 erscheinen seine *Adnotationes ad calculum integrale Euleri* (Anmerkungen zu EULER'schen Integralen); in dieser Abhandlung stellt MASCHERONI unter Beweis, dass er die von LEONHARD EULER entwickelten Methoden beherrscht. EULER hatte 1734 die Konstante γ auf sechs Stellen genau berechnet, ein Jahr danach weitere zehn Stellen ergänzt. MASCHERONI bestimmt 32 Dezimalstellen der Konstante (allerdings sind – wie sich später herausstellt, s. u. – wegen eines Übertragungsfehlers die Stellen 20 bis 22 nicht korrekt).



MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31



Quellen:

[https://commons.wikimedia.org/wiki/
File:Integral_Test.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Integral_Test.svg) / Jim Belk (links)

[https://commons.wikimedia.org/wiki/
File:Gamma-area.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gamma-area.svg) / William Demchick
(Kiwi128), CC BY 3.0 (rechts)

Vergleicht man den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ mit der harmonischen Reihe

$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$, dann kann man wegen $\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(1) = \ln(b)$ an der Abb. links

die Ungleichung $\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = H_n$ ablesen. Die in der Abb. rechts

blau gefärbten Flächen entsprechen kumuliert der Differenz $H_n - \ln(n)$.

EULER hatte 1734 den Zusammenhang (in einer eher symbolischen Schreibweise) notiert: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + C$ mit $C = 0,577218$. MASCHERONI selbst verwendet den Buchstaben A ; die heute übliche Bezeichnung mit „gamma“ erfolgt 1836 durch AUGUSTUS DE MORGAN. (Hinweis: Da die Differenzfolge $\ln(n+1) - \ln(n)$ eine Nullfolge ist, spielt es keine Rolle, ob $H_n - \ln(n)$ oder $H_n - \ln(n+1)$ untersucht wird.

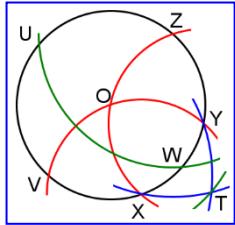
Für die Berechnung der Konstante benutzte EULER die Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion: $(\sum_{r=1}^n \frac{1}{r}) - \ln(n+1) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2} - \frac{1}{3} \cdot \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^3} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^4} - \dots$, wobei er für die Summen mit geraden Potenzen jeweils Grenzwerte angeben konnte (vgl. Lösung des Basler Problems): $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{r=1}^n \frac{1}{r^4} \right) = \frac{\pi^4}{90}$, ...

Mithilfe von Fehlerabschätzungen (sog. EULER-MACLAURIN-Formel) kam EULER schließlich auf die Darstellung $\gamma = (\sum_{r=1}^n \frac{1}{r}) - \ln(n) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{252n^6} - \dots$, die von MASCHERONI weiterentwickelt wird. In seiner Abhandlung geht MASCHERONI auch auf die sog. Integrallogarithmus-Funktion ein, die durch $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(u)} du$ definiert ist. Der in Berlin lebende Astronom und Mathematiker JOHANN GEORG VON SOLDNER leitet 1804 hierfür die Beziehung $Li(x) = \gamma + \ln(\ln(x)) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\ln(x))^r}{r \cdot r!}$ her, mit der er γ auf 22 Stellen genau bestimmt. Dabei fällt die Abweichung zu MASCHERONIS Ziffernfolge auf, was wiederum CARL FRIEDRICH GAUSS veranlasst, die Berechnung selbst zu überprüfen und einen seiner jungen Studenten, FRIEDRICH BERNHARD GOTTFRIED NICOLAI, bis zur 40. Stelle rechnen zu lassen.

1797 erobern französische Revolutionstruppen unter General NAPOLEON Oberitalien und fassen die eroberten Gebiete (Republik Venedig und habsburgische Territorien) zur Cisalpinischen Republik zusammen. MASCHERONI, der gerade dabei ist, sein neues Werk *Geometria del Compasso* (Geometrie des Zirkels) zu vollenden, lernt NAPOLEON kennen; er ist von dessen Persönlichkeit so beeindruckt, dass er diesem spontan sein neues Werk widmet. Das Buch wird mit einer in Versen verfassten Widmung für Bonaparte Italico gedruckt und umgehend auch ins Französische übersetzt.

NAPOLEON ist besonders beeindruckt, als MASCHERONI ihm unmittelbar eine Lösung für ein Problem liefern kann, das als NAPOLEONS Problem in die Literatur eingehen wird: (Abb. engl. Wikipedia / Henrygb)

- Wie kann man einen Kreis mit dem Zirkel allein in vier gleiche Teile teilen, also einem Kreis ein Quadrat einbeschreiben?



Das Problem und die in der Abb. rechts angedeutete Konstruktion wählt MASCHERONI als Einstieg für sein neues Buch. NAPOLEON bekundet seine Begeisterung auch gegenüber



JOSEPH LOUIS LAGRANGE und PIERRE-SIMON LAPLACE. „Nous attendions tout de vous, Général, excepté des leçons de Mathématiques.“ (Wir hätten alles von Ihnen erwartet, General, außer Unterricht in Mathematik.) soll der von NAPOLEON frisch ernannte Innenminister LAPLACE ausgerufen haben.

MASCHERONI ist nicht der Erste, der sich mit der Frage beschäftigt, welche Konstruktionen mit dem Zirkel allein durchführbar sind: Der dänische Mathematiker GEORG MOHR hatte sich bereits 1672 damit auseinandergesetzt. Dessen erst 1927 wieder entdecktes Werk *Euclidis Danicus* fand im 17. Jahrhundert jedoch keine große Verbreitung und war MASCHERONI wohl kaum bekannt.

MASCHERONI begründet seine Untersuchungen damit, dass es bei allen geometrischen Problemstellungen auf zu konstruierende Punkte ankommt. Im Einzelnen legt er dar, wie man einen Kreisbogen halbiert, dessen Mittelpunkt und Radius gegeben sind, wie man Streckenlängen durch Konstruktion addiert und subtrahiert, wie man zu drei gegebenen Streckenlängen die vierte Proportionale findet, wie man den Schnittpunkt zweier gegebener Geraden sowie die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis konstruiert. Mithilfe dieser Grundaufgaben zeigt er, dass für alle Konstruktionen, die überhaupt mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden können, die Verwendung des Zirkels genügt. - Das Buch enthält darüberhinaus auch praktikable Näherungskonstruktionen für Probleme, die nicht exakt durch Konstruktion lösbar sind.

In der Zwischenzeit zum Mitglied der Accademia Reale di Mantova sowie der Società Italiana delle Scienze ernannt, wird MASCHERONI als Abgeordneter in die gesetzgebende Versammlung nach Mailand gewählt. Die Regierung der Cisalpinischen Republik entsendet ihn nach Paris, wo er an der Einführung des metrischen Systems mitarbeiten soll. - 1791 hatte der französische Nationalkonvent beschlossen, dass die neue Längeneinheit gleich dem zehnmillionsten Teil der Länge des durch Paris verlaufenden Meridians zwischen Nordpol und Äquator sein soll. Mit der Durchführung neuer Vermessungen längs der Strecke Dünkirchen-Barcelona werden die französischen Astronomen JEAN-BAPTISTE JOSEPH DELAMBRE und PIERRE MÉCHAIN beauftragt; an der Auswertung sind auch andere beteiligt, darunter MASCHERONI.

Die Kommission beendet ihre Arbeit im Dezember 1799, aber MASCHERONI kann danach nicht in seine Heimat zurückkehren, denn in der Zwischenzeit ist die Cisalpinische Republik von österreichischen Truppen der Anti-NAPOLEON-Koalition besetzt worden: Die Habsburger hatten die Abwesenheit NAPOLEONS während dessen Ägypten-Feldzugs zum Angriff genutzt. Und so geschieht es, dass MASCHERONI - nach einer Erkältung ernsthaft erkrankt - in Paris stirbt.

