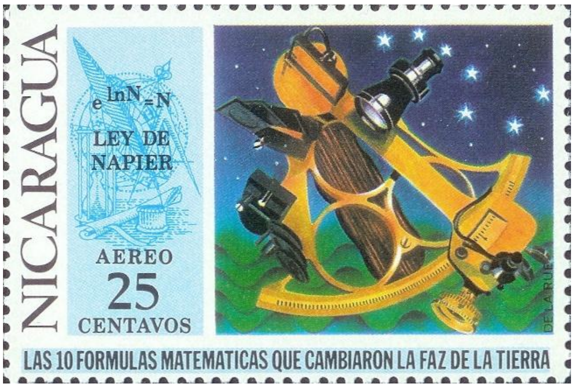
Oktober 2010

Vor 460 Jahren geboren — **John Napier** — (1550 - 1617)



Die „Erfindung“ der Logarithmen durch John Napier, Laird of Merchiston, zu Beginn des 17. Jahrhunderts hatte große Auswirkungen auf die Entwicklung der Naturwissenschaften. Die Definitionsgleichung $e^{\ln(x)} = x$ (diese Formulierung ist nicht Napier, sondern Leonhard Euler zuzuordnen) gehört zu den zehn *Mathematischen Formeln, die das Antlitz der Erde veränderten* – zumindestens nach der Einschätzung der Postverwaltung Nicaraguas. Zweifelsohne hat die Einführung der Logarithmen die Entwicklung der Wissenschaften beflügelt. Johannes Kepler erkannte den gewaltigen Vorteil für seine umfangreichen Berechnungen zur Bestimmung der Marslaufbahn und sorgte durch eigene Tafeln für eine rasche Verbreitung der Methode. 200 Jahre später stellte Laplace fest, dass sich durch diese Entdeckung *die Lebenszeit der Astronomen verdoppelt habe*.

Um 1600 war die Zeit reif für eine solche Entdeckung: Bereits Mathematiker des islamischen Kulturkreises hatten im Prinzip die Zusammenhänge erkannt, und bei dem deutschen Mathematiker Michael Stifel (1487–1567) findet man die Formulierung: *Addition in der arithmetischen Reihe entspricht der Multiplikation in der geometrischen, ebenso Subtraktion in jener der Division in dieser. Die einfache Multiplikation bei den arithmetischen Reihen wird zur Multiplikation in sich* (Potenzierung) *bei der geometrischen Reihe. Die Division in der arithmetischen Reihe ist dem Wurzelausziehen in der geometrischen Reihe zugeordnet, wie die Halbierung dem Quadratwurzelausziehen.* Dieser beschränkte allerdings die Anwendung der Potenzgesetze auf ganzzahlige Exponenten, während John Napier dies auf beliebige Exponenten erweiterte.

Auch der geniale Schweizer Uhrmacher und Instrumentenbauer Jost Bürgi (1552–1632), der von 1579 an als Hofastronom des Landgrafen von Hessen in Kassel arbeitete, beschäftigte sich mit der Frage, wie man den Zeitaufwand für die in der Astronomie notwendigen, umfangreichen Rechnungen reduzieren könnte.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Jost Bürgis Entdeckung der Logarithmen im Jahr 1588 und die von ihm erstellten ersten Logarithmentafeln fanden wenig Beachtung, da er die damalige Wissenschaftssprache, das Lateinische, nicht beherrschte und somit keinen Zugang zu den Foren der Wissenschaft hatte. Erst 1620, nachdem Napiers Schriften bereits starke Verbreitung gefunden hatten, ließ er seine *Aritmetischen und Geometrischen Progress Tabulen, sambt gründlichem unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen werden sol* drucken; die Auflage wurde während des 30-jährigen Krieges vernichtet.

John Napier wächst in einer vermögenden und einflussreichen schottischen Adelsfamilie auf. Sein Vater, Archibald Napier, wird von dessen Eltern bereits im Alter von 15 Jahren verheiratet; der erste Sohn, John, wird geboren, als Archibald 16 Jahre alt ist. (Die Schreibweise des Familiennamens, wie sie heute üblich ist, findet man übrigens nicht in den Dokumenten des 16. und 17. Jahrhundert; vielmehr wird sehr häufig die Schreibweise Neper verwendet, aber auch Napeir, Naipper u. a. m.) Foto: Wikimedia

Mit 13 Jahren wird John an die Schule geschickt, die der St. Andrews University angeschlossen ist; der Rektor kümmert sich persönlich um den Jungen, insbesondere, als dessen Mutter stirbt. Es ist nicht bekannt, wann John die Schule verlassen hat, um seine Studien auf dem Kontinent fortzusetzen (Frankreich, Niederlande, evtl. auch Italien). Erst 1571 kehrt er wieder nach Schottland zurück, heiratet, hat mit der ersten Ehefrau zwei, mit der zweiten zehn Kinder, beschäftigt sich intensiv mit der Bewirtschaftung seiner Ländereien, entwickelt Methoden zur Verbesserung des Ertrags der Felder durch Salz-Düngungen und vertieft sich intensiv in Fragen theologischen Inhalts. Fanatisch vertritt er die Seite des Protestantismus und verfasst im Jahr 1593 die Schrift *Plaine Discovery of the Whole Revelation of St. John* (Enthüllungen über die Offenbarung des Heiligen Johannes), in der er nachzuweisen versucht, dass der Papst in Rom der eigentliche Antichrist ist; auch „berechnet" er den Zeitpunkt des Jüngsten Tages („zwischen 1688 und 1700"). Das Buch findet große Verbreitung, auch in Übersetzungen für die Niederlande, Frankreich und Deutschland (insgesamt 21 Auflagen); Napier hält es für seine bedeutendste Leistung.

Um der drohenden Invasion durch die spanische Armada in Schottland vorzubeugen, entwirft er neuartige Waffensysteme, wie z. B. gepanzerte Fahrzeuge, und untersucht, wie sich die Idee des Archimedes realisieren lässt, Segelschiffe mithilfe von Brennspiegeln in Brand zu setzen. Auch nach dem Untergang der Armada (1588) besteht die Gefahr einer Invasion, da schottische Adlige, darunter auch sein Schwiegervater, wieterhin ein gegen England gerichtetes Bündnis mit Spanien suchen.

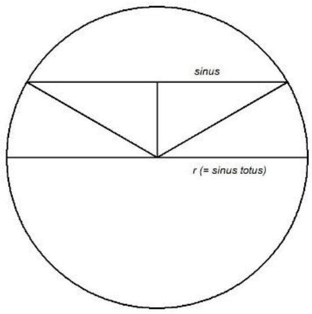
Es ist nicht klar, wann und wodurch Napiers besonderes Interesse für die Mathematik geweckt wird; auch dieses „Hobby" betreibt er mit großer Intensität. Insbesondere ist er daran interessiert, Methoden zu entwickeln, durch die der Rechenaufwand vermindert werden kann. Zwanzig Jahre lange arbeitet er an dem Problem, dann erscheint 1614 seine Schrift *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, in der er die Vorzüge des logarithmischen Rechnens beschreibt und erste Tabellen anhängt.

NAPIER verwendet zunächst noch den Begriff „künstliche Zahlen", gibt ihnen dann die Bezeichnung *Logarithmus* im Sinne von Verhältniszahl – gebildet aus den griechischen Wörtern *logos* (hier: Verhältnis) und *arithmos* (Zahl); denn die Logarithmen werden durch ein Zahlenverhältnis *definiert*: $a:b=c:d \Leftrightarrow \log(a)-\log(b)=\log(c)-\log(d)$.

Um die Vorteile des Rechnens mit Logarithmen nutzen zu können, sollten die Werte der zugrunde liegenden geometrischen Zahlenfolge möglichst dicht liegen: STIFEL betrachtet in seiner *Arithmetica Integra* von 1544 die ganzzahligen Potenzen von 2; dabei werden die Abstände zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen immer größer:

arithmetische Folge: $\log_2(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
geometrische Folge: x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

NAPIER wählt für seine Logarithmentafel von Sinus-Werten (das sind zu dieser Zeit nicht Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck, sondern Längen von halben Kreissehnen) eine *geometrische* Folge mit $q=0{,}9999999$ und - um Dezimalzahlen zu vermeiden - als Startwert den Kreisradius $r=10^7$ (*sinus totus*), also $g_n=10^7\cdot\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n$ und als zugeordnete arithmetische Folge $a_n=n\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot10^7}\right)$ mit $\log_{Nap}(10^7)=0$.



Nachteilig ist, dass für $x_1<x_2$ gilt: $\log_{Nap}(x_1)>\log_{Nap}(x_2)$, vor allem aber: Will man eine Division a/b durchführen, dann folgt aus $x=\frac{a}{b}$ und $\frac{a}{b}=\frac{x}{1}$, dass gilt: $\log(x)-\log(1)=\log(a)-\log(b)$, also $\log(a/b)=\log(a)-\log(b)+\log(1)$. Analog folgt für das Produkt: $y=a\cdot b$, also $\frac{y}{b}=\frac{a}{1}$, dass gilt: $\log(y)-\log(b)=\log(a)-\log(1)$, d. h. $\log(a\cdot b)=\log(a)+\log(b)-\log(1)$.

Der Londoner Mathematik-Professor HENRY BRIGGS (1561–1630) erkennt die Rechenvorteile, die durch die Verwendung der „Verhältniszahlen" möglich sind, nimmt die mühevolle Reise nach Schottland auf sich, um NAPIER vorzuschlagen, als Basis für die Logarithmen die Zahl 10 zu wählen (was dieser bereits in einer vorher erstellten, aber erst posthum veröffentlichten Schrift *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* überlegt hatte). Außerdem definieren sie: $\log(1)=0$ log(1) = 0, was das logarithmische Rechnen erheblich vereinfacht.

Während der folgenden Jahre ist BRIGGS mit der Berechnung einer Tafel von 30.000 (von geplanten 100.000) Logarithmen mit 14-stelliger Genauigkeit beschäftigt; ihm zu Ehren werden dekadische Logarithmen auch heute noch als *BRIGGSche Logarithmen* bezeichnet.

BRIGGS entwickelt hierfür eine geniale Methode: Er berechnet zunächst (handschriftlich) die Quadratwurzel aus 10, zieht aus dieser wiederum die Quadratwurzel usw., und zwar über 50-mal; er bestimmt jede der Wurzeln auf 30 Stellen genau.

Da sich jede Zahl x mit $1<x<10$ darstellen lässt als $x=(10^{\frac{1}{2}})^{k_1}\cdot(10^{\frac{1}{4}})^{k_2}\cdot(10^{\frac{1}{8}})^{k_3}\cdot\ldots$ mit $k_1,k_2,k_3,\ldots\in\{0,1\}$, also $\log_{10}(x)=k_1\cdot0{,}5+k_2\cdot0{,}25+k_3\cdot0{,}125+\ldots$, gibt die Folge der k_i die Ziffernfolge des Logarithmus von x im Dualsystem an.

Beispiel: Für $x=2$ findet man für die k_i nacheinander die Werte: 0; 1; 0; 0; 1; 1; 0; 1; 0; 0; … , also $\log_{10}(2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots\approx0{,}30103$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
2	0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
3	0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
5	0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
6	0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
7	0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
8	0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
9	0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

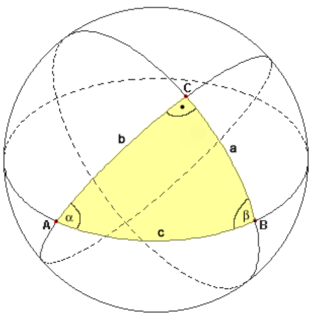
Kurz vor seinem Tod vollendet Napier seine *Rabdologiae* (*rhabdos* (griech.) = Stäbchen), in der er besondere Rechenstäbe vorstellt (auch unter dem Namen *Napier's bones* bekannt, da sie häufig aus Elfenbein hergestellt wurden). Diese Stäbe enthalten die Vielfachen der Zahlen von 0 bis 9, wobei die Einerziffer rechts unten und die Zehnerziffer links oben eingetragen ist. - Um beispielsweise die Multiplikation der Zahlen 73034 und 6 auszuführen, legt man die Stäbe mit den Vielfachen von 7, 3, 0, 3 und 4 nebeneinander; dann kann man in der 6. Zeile das Ergebnis 438204 ziffernweise von rechts nach links ablesen: $4; 2+8=0$ mit Übertrag 1; $1+1+0=2; 0+8=8; 1+2=3; 4$. Für die Multiplikation mehrstelliger natürlicher Zahlen notiert man die Ergebnisse der Multiplikation der einzelnen Ziffern des zweiten Faktors jeweils um eine Stelle versetzt untereinander. Für das Produkt von Dezimalzahlen muss man die Regeln des Komma-Setzens beachten. Mithilfe der Napier-Stäbe ist auch die Durchführung der Division möglich, bei der ja im Prinzip die einzelnen Ziffern des Ergebnisses erraten und dann durch Multiplikation überprüft werden. Mit etwas Übung können die Stäbe sogar für das Wurzelziehen verwendet werden.

	7	3	0	3	4
1	0/7	0/3	0/0	0/3	0/4
2	1/4	0/6	0/0	0/6	0/8
3	2/1	0/9	0/0	0/9	1/2
4	2/8	1/2	0/0	1/2	1/6
5	3/5	1/5	0/0	1/5	2/0
6	4/2	1/8	0/0	1/8	2/4
7	4/9	2/1	0/0	2/1	2/8
8	5/6	2/4	0/0	2/4	3/2
9	6/3	2/7	0/0	2/7	3/6

Das Verfahren der Multiplikation mithilfe der Rechenstäbe gibt Wilhelm Schickard (1592–1635) Anregungen für die Entwicklung einer Rechenmaschine, die dieser 1623 vorstellt.

Im Jahr 1608 hat Simon Stevin durch seine Schrift *De Thiende* eine noch etwas umständliche Notation von Dezimalzahlen in Europa eingeführt. John Napier verbessert sie, indem er in seinen letzten Veröffentlichungen den Dezimalpunkt zur Kennzeichnung der Grenze zwischen dem ganzzahligen und dem Bruchteil einer Zahl verwendet, was dann in (fast) allen Ländern übernommen wird.

Schließlich sind noch seine Verdienste in der Sphärischen Trigonometrie zu erwähnen; noch heute wird eine Satzgruppe als *Nepersche Regeln* bezeichnet (Napier hat als Erster ein gemeinsames Bildungsprinzip der Sätze erkannt): *Im rechtwinkligen Kugeldreieck ist der Kosinus jedes Stückes gleich dem Produkt der Kotangens der anliegenden Stücke und auch gleich dem Produkt der Sinus der nicht anliegenden Stücke* (wobei die „Stücke" $\alpha, c, \beta, 90° - a, 90° - b$ sind).



Beispiele: $\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b)$; $\cos(c) = \cot(\alpha) \cdot \cot(\beta)$

Darüber hinaus werden bestimmte Sätze über die Summe bzw. Differenz von Seiten und Winkeln im allgemeinen Kugeldreieck als *Nepersche Analogien* bezeichnet.