Mai 2022

Vor 500 Jahren lebte **Christoff Rudolff** (1499 – 1543)

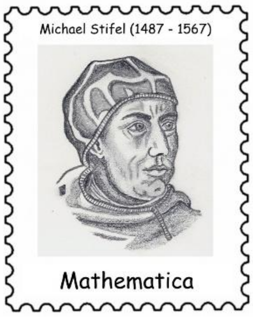
Im Jahr 1525 erschien in Straßburg das erste deutsche Algebra-Buch mit dem Titel *Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeinicklich die Coß genennt werden*. Das Wort *Coß* aus dem italienischen *Cosa* (Ding, Sache; lateinisch: *res*) steht für das Rechnen mit *einer* Variablen.

Autor des Werks war Christoff Rudolff, dessen Lebensdaten nicht genau bekannt sind, auch existiert kein Porträt von ihm. Als Geburtsort gibt er selbst Jauer an (heute Jawor/Woiwodschaft Niederschlesien, damals Königreich Böhmen), möglicherweise ist 1499 sein Geburtsjahr.

Zwischen 1517 und 1521 studierte Rudolff an der Universität Wien bei Heinrich Schreiber (latinisiert: Henricus Grammateus; dieser war Autor verschiedener Rechenbücher, darunter *Ayn new kunstlich Buech welches gar gewiss vnd behend lernet nach der gemainen Regel detre* aus dem Jahr 1518. In diesem Buch behandelte Schreiber das *Rechnen auf den Linien*, den Dreisatz (*Regel detri*), die *Regula falsi*, die Harmonielehre (Proportionen in der Musik), das praktische Rechnen für Kaufleute, die Buchführung sowie die Fassmessung mit der Visierrute.

Schreiber war der Erste, der die Symbole „+" und „–" als Rechenzeichen für Addition bzw. Subtraktion verwendete. (Erfunden wurden die Zeichen „+" und „–" von Johannes Widmann (1460-1498), der sie 1489 in einem Buch beim kaufmännischen Rechnen als Kennzeichen für Überschuss und Defizit benutzte.)

Vermutlich blieb Rudolff für den Rest seines Lebens in Wien und verdiente seinen Lebensunterhalt durch den Verkauf seiner Bücher sowie durch Unterricht. – Rudolffs Sterbedatum lässt sich aus einer Information erschließen, die Michael Stifel gab. Dieser erwähnte in seiner *Arithmetica integra* aus dem Jahr 1544, dass Christoff Rudolff verstorben sei.



(Zeichnung © Andreas Strick)

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Das RUDOLFF'sche Buch aus dem Jahr 1525 umfasst 206 Doppelseiten (*Folia*). Im ersten Kapitel wird die schriftliche Durchführung der Grundrechenarten behandelt; stets solle die Neuner- oder die Siebenerprobe durchgeführt werden. Bei der Multiplikation nennt RUDOLFF das kleine Einmaleins als Grundlage, weist aber darauf hin, dass man eigentlich nur das Einmaleins für Zahlen kleiner gleich 5 beherrschen muss. Statt der „großen" Faktoren 6, 7, 8, 9 benutze man die „kleinen" Ergänzungszahlen zu 10, also die Zahlen 4, 3, 2, 1 (in Rot). Die Einerstelle des Produkts ergibt sich aus dem Produkt der Ergänzungen zu 10, die Zehnerstelle aus der Differenz der Zehnerstelle der ersten Zahl und der Ergänzung zu 10 des zweiten Faktors, ggf. unter Berücksichtigung des Übertrags von der Einerstelle. Diese Methode funktioniert auch umgekehrt (vgl. das vierte Beispiel rechts – Rechnen mit negativen Zahlen).

9	1
8	2
9 – 2 = **7**	1 · 2 = **2**
7	**2**

7	3
7	3
7 – 3 = 4	3 · 3 = 9
4	**9**

6	4
7	3
6 – 3 = 3	4 · 3 = 12
3 + 1Ü	**2**

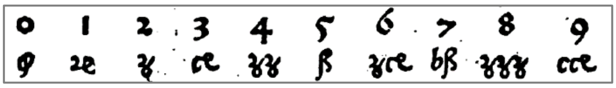
2	8
4	6
2 – 6 = -4	8 · 6 = 48
-4 + 4	**8**

Bemerkenswert ist RUDOLFFs Hinweis bzgl. der Division durch 10 bzw. durch 100: Man trenne von rechts eine bzw. zwei Stellen ab: $652:10=65|2$ und $652:100=6|52$ – möglicherweise ein erster Schritt zu einer Schreibweise für Dezimalzahlen.

Im zweiten Kapitel behandelt Rudolff die Bruchrechnung: multiplizieren, kürzen (*prüch kleiner machen*), erweitern, gleichnamig machen, addieren und subtrahieren, Brüche vergleichen. Interessant ist: Beim Dividieren werden die Brüche zuerst gleichnamig gemacht, dann werden die Zähler dividiert und die Nenner weggelassen.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit Dreisatzaufgaben sowie Umrechnungen der Geld- und Maßeinheiten verschiedener Länder; im vierten Kapitel folgt jeweils ein Beispiel zum schriftlichen Ziehen einer Quadrat- und einer Kubikwurzel.

Die eigentliche „*Coß*" beginnt im fünften Kapitel des Buchs mit der Einführung von Variablen. Dabei verwendet RUDOLFF für die verschiedenen Potenzen jeweils eigene Symbole: Das erste Symbol ist Platzhalter für die *Einheit* (*dragma* oder *numerus*), wir würden heute x^0 dafür schreiben, das zweite für die unbekannte Größe (*radix*, x), das dritte steht für das Quadrat der unbekannten Größe (*zensus*, x^2), das vierte für die dritte Potenz (*cubus*, x^3) usw., vgl. rechts.



Für uns ungewohnt ist, dass RUDOLFF das *dragma*-Symbol durchgehend verwendet, z. B. steht  für die Gleichung $3x^2+4x=20$.

Zu Beginn seiner Ausführungen weist RUDOLFF auf eine wichtige Regel hin: Nur *Benennungen* (Terme) gleicher Art können durch Addition oder Subtraktion zusammengefasst werden. Eine Rechenprobe kann dadurch erfolgen, dass man beliebige Zahlen für die Variablen einsetzt. Für die Multiplikation der Platzhalter verschiedener „Ordnungen" gibt er zunächst eine Verknüpfungstafel mit allen möglichen Kombinationen an, beispielsweise $x^2\cdot x^3=x^5$ (in unserer Schreibweise); im Prinzip beschreibt er dabei das erste Potenzgesetz. Beim Rechnen sind Vorzeichenregeln (z. B. *plus* mal *minus* ist *minus* usw.) sowie das Distributivgesetz anzuwenden.

Das sechste Kapitel beschäftigt sich mit Bruchtermen, für die die gleichen Regeln gelten wie für gewöhnliche Zahlbrüche. Die folgenden Beispiele zeigen seine Souveränität im Umgang mit den Regeln: $\frac{3}{4x^2}\cdot\frac{1}{4}x=\frac{3}{16x}$, $\frac{3x+4}{5x^2-2x}\cdot\frac{4x-4}{5x^2+4}=\frac{12x^2+4x-16}{25x^4+20x^2-10x^3-8x}$, $\frac{4x+5}{1x}:\frac{3}{3x-2}=\frac{12x^2+7x-10}{3x}$.

Im siebten Kapitel behandelt RUDOLFF das Rechnen mit Wurzeln. Für Quadratwurzeln verwendet er als Erster in der Geschichte der Mathematik das Symbol $\surd$. Grundsätzlich unterscheidet er drei Typen von Zahlen: *rationale* oder *wolgeschickte Zahlen*, das sind Quadratzahlen wie z. B. die Zahl 4, aus denen die Wurzel gezogen werden kann, *comunicanten* oder *mittermessig Zahlen,* das sind Vielfache von Quadratzahlen wie z. B. die Zahl 8, aus denen – wie wir sagen würden – teilweise die Wurzel gezogen werden kann, und *irrationale* oder *ganz ungeschickte Zahlen*.

Darstellungen der Form $a \cdot \sqrt{b}$ treten bei ihm nicht auf, sondern stets als $\sqrt{a^2 \cdot b}$ notiert. Bei der Addition und Subtraktion von Wurzeln solle man die Radikanden auf gemeinsame Faktoren hin untersuchen, also beispielsweise bei $\sqrt{8}+\sqrt{18}$ die Radikanden zerlegen in $\sqrt{4\cdot 2}+\sqrt{9\cdot 2}$, dann aus den Faktoren 4 und 9 jeweils die Wurzel ziehen und die Ergebnisse addieren, sodass sich die Summe 5 ergibt, die quadriert wieder unter die Wurzel gezogen wird; damit ergibt sich: $\sqrt{8}+\sqrt{18}$ *facit* $\sqrt{50}$. Wenn dies nicht möglich ist, quadriere man die Summe oder Differenz und ziehe anschließend wieder die Wurzel; so wird z. B. aus $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ durch Anwenden der binomischen Formel zunächst $7+5-\sqrt{4\cdot 7\cdot 5}$ also $12-\sqrt{140}$ und somit: $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ *facit* $\sqrt{12-\sqrt{140}}$.

Nach entsprechenden Ausführungen über dritte und vierte Wurzeln geht RUDOLFF im zehnten Kapitel auf das Rechnen mit zusammengesetzten Termen ein, wie z. B. $5+\sqrt{7}$ und $\sqrt{8}+\sqrt{6}$, die Rudolff als *binomium* bezeichnet, zusammen mit dem jeweils zugehörigen *residuum* $5-\sqrt{7}$ bzw. $\sqrt{8}-\sqrt{6}$. Besonderen Raum nimmt das Zusammenspiel von *binomium* und *residuum* (und umgekehrt) bei der Division ein. Aus manchen dieser *binomia* gelangt man durch Wurzelziehen wieder auf ein *binomium*, wie beispielsweise von $14+\sqrt{180}$ auf $3+\sqrt{5}$ oder von $8+\sqrt{60}$ auf $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ – die anderen nennt RUDOLFF *surdisch* und *ungeschickt*.

Das zweite Buch ist in drei Abschnitte unterteilt. Im ersten geht um das Lösen von Gleichungen. Es beginnt mit der Auflistung der acht Gleichungstypen (*equation*), zu denen er jeweils mehrere Beispiele angibt (die Exponenten der auftretenden Potenzen wachsen dabei um 1). Null als Lösung sowie negative Lösungen werden durchgängig nicht beachtet. Statt des Gleichheitszeichens in diesen *Vergleichungen* schreibt er die Worte *„sein gleich"* zwischen die beiden Terme. Alle diese Beispiele haben 2 als Lösung.

– *Erster Typ:* $3x=6;\, 4x^2=8x;\, 5x^3=10x^2;\, \ldots;\, 11x^9=22x^8$
– *Zweiter Typ:* $2x^2=8;\, 3x^3=12x;\, 4x^4=16x^2;\, \ldots;\, 9x^9=36x^7$
– *Dritter Typ:* $2x^3=16;\, 3x^4=24x;\, 4x^5=32x^2;\, \ldots;\, 8x^9=64x^6$
– *Vierter Typ:* $2x^4=32;\, 3x^5=48x;\, 4x^6=64x^2;\, \ldots;\, 7x^9=112x^5$
– *Fünfter Typ:* $3x^2+4x=20;\, 5x^3+6x^2=32x;\, 7x^4+8x^3=44x^2;\, \ldots;\, 6x^9+10x^8=44x^7$
– *Sechster Typ:* $4x^2+8=12x;\, 5x^3+9x=14\tfrac{1}{2}x^2;\, 6x^4+10x^2=17x^3;\, \ldots;\, 11x^9+15x^7=29\tfrac{1}{2}x^8$,
  außerdem $2x^2+30=19x;\, 3x^3+31x=21\tfrac{1}{2}x^2;\, 4x^4+32x^2=24x^3;\, \ldots;\, 9x^9+37x^7=36\tfrac{1}{2}x^8$
– *Siebter Typ:* $4x+12=5x^2;\, 5x^2+14x=6x^3;\, 6x^3+16x^2=7x^4;\, \ldots;\, 11x^8+26x^7=12x^9$
– *Achter Typ:* Gleichungen, die wie Typ 5, 6 oder 7 gelöst werden können; bei diesen steht x^4 statt x^2 und x^2 statt x, und entsprechend x^6 statt x^3, x^4 statt x^2 usw.

RUDOLFF geht in der ersten Ausgabe des Buches nicht darauf ein, dass alle Gleichungen vom Typ 6 noch eine weitere Lösung haben; dies korrigiert er später.

Der zweite Abschnitt befasst sich mit den vier Maßnahmen (*cautelae*), die zur Lösung einer Gleichung führen:

– *Treten in einer Gleichung Terme gleicher Ordnung mehrfach auf, dann fasse man sie zusammen, ggf. durch Addition oder Subtraktion auf beiden Seiten der Gleichung.*
– *Wenn in einer Gleichung Terme vorkommen, vor denen ein Minuszeichen steht, dann gleiche man durch Addition aus.*
– *Wenn Wurzelterme auftreten, dann quadriere man.*
– *Wenn auf beiden Seiten Bruchterme stehen, dann multipliziere man* kreutzweiß.

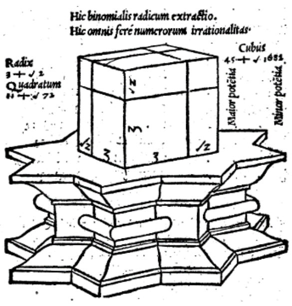
Der dritte Abschnitt des zweiten Buchs enthält auf 145 Doppelseiten über 400 Aufgaben mit vollständigen Lösungen (Festlegung der Variablen, Aufstellen der Gleichung, Umformungen gemäß den o. a. Regeln). Vom hohen verbalen Anteil einmal abgesehen, unterscheiden sich die Lösungswege kaum von denen der Algebra-Aufgaben, wie wir sie aus heutigen Schulbüchern kennen. Hier eine kleine Auswahl zum ersten Typ:

- Wenn man eine Zahl, die kleiner ist als 10, mit 3 multipliziert, dann liegt das Produkt 7-mal so viel über 10, wie die Zahl kleiner ist als 10.
- Von neun Zahlen einer arithmetischen Folge (*über sich wachsend mit gleicher Übertretung*) ist die kleinste die Zahl 4 und die Summe beträgt 48.
- Die Länge einer Höhe in einem Dreieck mit den Seiten 13, 14, 15 ist zu bestimmen.
- In einem rechtwinkligen Dreieck (*recht winckelmässiges triangel*) hat eine der Katheten die Länge $3+\sqrt{18}$, die andere Kathete und die Hypotenuse haben zusammen die Länge $9+\sqrt{162}$.

Bei den insgesamt 240 Aufgaben zu Gleichungen zum ersten Typ geht es um Probleme, wie sie bereits in der Aufgabensammlung von LEONARDO VON PISA vorkommen und wie man sie später in LEONHARD EULERS *Vollständige Anleitung zur Algebra* wiederfindet. Es geht um Glücksspieler, die unterschiedliche Beträge gewinnen oder verlieren, um Reisende, die sich von zwei Städten aus aufeinander zu bewegen. Dann vergleichen zwei Männer die Inhalte ihrer Geldbörsen, drei Männer würden gerne ein Haus bzw. ein ganzes Dorf kaufen, ein Pferd bzw. mehrere Pferde erwerben, benötigen dafür aber Geld von den anderen. Weiter folgen Kalkulationen zur Besoldung von Landsknechten, um eine Stadt zu erobern, werden Arbeiter für Arbeitstage entlohnt und für Fehltage wird Geld abgezogen, müssen die Einkünfte aus einem Brückenzoll nachträglich wieder aufgeschlüsselt werden, wird in drei Mühlen mit unterschiedlicher Kapazität gleichzeitig und gleich lange Getreide gemahlen, werden Gesellschaften gegründet und Gewinne aufgeteilt, besucht ein Musikant nacheinander drei Wirtshäuser und wird dafür entlohnt, muss aber jedesmal für sein Essen bezahlen usw.

Bei Gleichungssystemen mit zwei oder sogar mehr als zwei Variablen wird eine weitere Variable benötigt, die RUDOLFF als *Quantität* bezeichnet (und dieses Wort jedesmal in der Gleichung ausschreibt). Die Lösung dieser Aufgaben erscheint (aus heutiger Sicht) noch etwas kompliziert, aber nur wenige Jahre später findet man bei STIFEL bereits eine Lösungsvariante mit mehreren Variablen (s. u.). Unter den Aufgaben kommt auch ein Problem mit einer negativen Lösung vor, was RUDOLFF mit *volgt unmüglichkeit* kommentiert. – Insgesamt auffallend ist der hohe Anteil von Aufgaben, in denen Wurzelterme auftreten; dies gilt auch für die anderen Gleichungstypen, beispielsweise:

- Multipliziert man die Hälfte einer Zahl und ein Drittel der Zahl, dann erhält man $36+\sqrt{1152}$.
- Wenn ich vom Quadrat einer Zahl 3 subtrahiere und auch zum Quadrat der Zahl 3 addiere, dann ergibt das Produkt der beiden Ergebnisse $88-\sqrt{9408}$.
- Eine Zahl ist um $2+\sqrt{2}$ größer als eine andere. Wenn ich sie miteinander multipliziere. ergibt sich $36+\sqrt{1152}$.
- Einer leiht einem anderen 25 Gulden für zwei Jahre mit Zins und Zinseszins. Nach zwei Jahren zahlt dieser 49 Gulden zurück.
- Zwei Bauern haben Ochsen verkauft, der eine 30, der andere etliche. Für einen Ochsen erhielten die beiden jeweils so viele Gulden, wie der zweite Bauer Ochsen verkauft hat. Subtrahiert man von den Einnahmen des ersten die des zweiten und zieht daraus die dritte Wurzel, dann weiß man, wie viel Geld es für einen Ochsen gab.
- Gesucht sind zwei Zahlen, deren Summe $10+\sqrt{18}$ beträgt. Multipliziert man sie, so ergibt sich $25+\sqrt{338}$.
- Einer wird gefragt, wieviel Wochen er alt sei. Dieser antwortet: Subtrahiert man 312 von einem Viertel der Anzahl der Wochen, dann ist dies gleich der Wurzel aus der Anzahl der Wochen vermindert um 27.
- Zwei Männer besitzen Geld, der zweite 4 Gulden weniger als der erste. Wenn man die beiden Vermögen miteinander multipliziert und das Produkt quadriert, dann ergibt sich dasselbe, wie wenn man die dritte Potenz des größeren Betrags mit $5\frac{1}{3}$ multipliziert.



Am Ende des Buches präsentiert RUDOLFF noch drei Probleme, die auf eine kubische Gleichung führen, für deren Lösung damals noch kein systematisches Lösungsverfahren zur Verfügung steht. Der zum Abschluss abgebildete Kubus zeigt, dass er den wenige Jahre später u. a. von TARTAGLIA entdeckten Ansatz erahnt hat.

Nur ein Jahr nach seinem Algebra-Buch veröffentlicht RUDOLFF ein zweites Buch mit dem Titel *Künstliche Rechnung mit der ziffer und mit den zal pfennigen* – ein Lehrbuch für Rechenschüler, Kaufleute und Handwerker. Der erste Teil (*Grundbüchlein*) ist vergleichbar mit dem des ersten Werks, zusätzlich enthält es auch das Rechnen mit Rechenpfennigen. Im zweiten Teil (*Regelbüchlein*) werden der Dreisatz und eine Methode des praktischen Rechnens mit Einheiten (*welsche Praxis*) erläutert sowie zahlreiche Beispiele gerechnet (*Exempelbüchlein*). Das Buch hatte bis zum Ende des 16. Jahrhunderts mindestens 17 Auflagen.

Ungefähr zehn Jahre nach RUDOLFFs Tod erschien in Königsberg *Die Coß Christoffs Rudolffs mit schönen Exempeln der Coß durch Michael Stifel gebessert und sehr vermehrt*. STIFEL übernahm hierzu den vollständigen RUDOLFF'schen Text und fügte zahlreiche Kommentare und Ergänzungen (z. B. zu kubischen Gleichungen) hinzu, sodass der Umfang mehr als verdoppelt wurde und nunmehr 491 Doppelseiten betrug.

In der Vorrede lobt STIFEL das inzwischen nicht mehr verfügbare Werk RUDOLFFs als *so klar und deutlich, dass ich dieselbige Kunst ohn allen mündtlichen underricht verstanden hab* (*mit Gottes hülff*) *und gelernet*. Auch weist er die Kritik zurück, RUDOLFF habe etliche Aufgaben aus einer Handschrift abgeschrieben, die sich in der Wiener Bibliothek befindet: Durch die Übernahme von Aufgaben sei niemandem ein Schaden entstanden, vielmehr sollte dies als Ehre angesehen werden, und außerdem sei es der Zweck einer Bibliothek, dass jeder sie nutzen kann.