Oktober 2015

Vor 250 Jahren geboren **Paolo Ruffini** (22.09.1765 – 10.05.1822)

Zeichnung © Andreas Strick 2015

Geboren im Städtchen Valentano, auf halbem Weg zwischen Rom und Siena gelegen, wächst Paolo Ruffini als Sohn eines Arztes auf. Später zieht die Familie nach Modena (Emilia-Romagna) um, wo Paolo mit 18 Jahren an der Universität ein Studium der Mathematik, Medizin, Philosophie und Literatur beginnt. Als sein Analysis-Professor vom Herzog von Modena und Reggio zum Verwalter der fürstlichen Güter ernannt wird, beauftragt man den Studenten Ruffini mit der Durchführung der Analysis-Vorlesung. Im darauf folgenden Jahr (1788) beendet dieser sein Studium mit qualifizierten Abschlüssen in Philosophie, Medizin und Mathematik und wird zum Professor für die Grundlagen der Analysis ernannt. Und als drei Jahre später sein ehemaliger Geometrie-Professor die Lehrtätigkeit aus Gesundheitsgründen aufgeben muss, erfolgt Ruffinis Ernennung zum Professor für die Grundlagen der Mathematik. Im selben Jahr erhält er auch die Zulassung, als Arzt zu praktizieren.

Im Jahr 1795 beginnen die französischen Revolutionstruppen mit der Eroberung Norditaliens, schließlich proklamiert Napoleon im Juni 1797 die *Cisalpinische Republik* als französische Tochterrepublik mit Hauptstadt Mailand. Gegen seinen Willen wird Ruffini als Delegierter in eine der Kammern des neu gegründeten Staates berufen. Bald gelingt es ihm, dieses ungeliebte Amt abzugeben und seine Hochschultätigkeit wieder aufzunehmen. Dies ist jedoch nur von kurzer Dauer, da er verpflichtet wird, einen Eid auf die Verfassung der Republik zu leisten, was er aus religiösen Gründen verweigert.

Ruffini erträgt die Entlassung aus dem Hochschuldienst mit großer Gelassenheit, denn so hat er mehr Zeit für die Behandlung seiner Patienten, denen er sich mit großer Hingabe widmet. Außerdem hat er jetzt die Muße, sich mit einem mathematischen Problem auseinanderzusetzen, das ihn seit Jahren beschäftigt: Die Frage der Lösbarkeit von Gleichungen 5. Grades durch Radikale.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Bereits die Babylonier kannten Methoden zur Lösung quadratischer Gleichungen; diese wurden um 830 durch al-Khwarizmi systematisiert. Im Laufe des 16. Jahrhunderts entwickelten Scipione del Ferro, Girolamo Cardano, Niccolò Tartaglia, Lodovico Ferrari und schließlich auch François Viète Verfahren, um beliebige Gleichungen 3. bzw. 4. Grades zu lösen. Da zunächst nur positive Koeffizienten zugelassen wurden, musste man etliche Fallunterscheidungen durchführen. Cardano zeigte, dass dies nicht notwendig ist, sondern dass für die Lösung der reduzierten Gleichung 3. Grades $z^3 + pz + q = 0$ nur verschiedene Fälle hinsichtlich der *Diskriminante* $\Delta = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$ beachtet werden müssen. Durch die Verwendung komplexer Zahlen durch Rafael Bombelli war endgültig klar, dass Gleichungen bis zum Grade 4 durch *Radikale* lösbar sind, d. h., dass die Lösungen mithilfe von Formeln darstellbar sind, in denen als Operationen nur Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sowie das Wurzelziehen auftreten. Eine entsprechende Lösungsformel für Gleichungen 5. Grades zu finden, schien nur noch eine Frage der Zeit zu sein. Aber obwohl sich viele Mathematiker, darunter auch Leonhard Euler, um ein solches Lösungsverfahren bemühten, war die Suche vergeblich.

1770 veröffentlicht Joseph Louis Lagrange die Abhandlung *Réflexions sur la résolution algébrique des équations,* in der er sogenannte *Resolventen* untersucht, das sind Hilfsgrößen, die beim Lösungsverfahren eine Rolle spielen (zeitgleich ähnliche Untersuchungen auch durch Alexandre-Théophile Vandermonde).

Betrachtet man die drei Lösungen x_1, x_2, x_3 einer kubischen Gleichung, dann könnte man diese drei Lösungen auf $3! = 6$ Arten nummerieren. Man stellt aber fest, dass die Lagrange-*Resolvente* R mit $R = (1 \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2 + \alpha^2 \cdot x_3)^3$ nur zwei verschiedene Werte annimmt, wenn man die Nummerierung der Lösungen vertauscht (permutiert). Dabei steht α für eine nicht-triviale dritte Einheitswurzel, also eine Lösung der Gleichung $x^3 = 1$. Diese beiden Werte vereinfachen dann das Lösungsverfahren: Nur zwei Hilfsgleichungen müssen gelöst werden, um zu den Lösungen der kubischen Gleichung zu kommen. – Bei Gleichungen 4. Grades führt der Ansatz mit $R = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$ nicht zu $4! = 24$, sondern nur zu drei verschiedenen Werten, sodass zur konkreten Lösung der Gleichung 4. Grades nur drei Hilfsgleichungen gelöst werden müssen.

Bei Gleichungen höheren Grades erweist sich jedoch jeder Resolventen-Ansatz als nutzlos: Die Ansätze führen nicht zu einer Vereinfachung des Lösungsverfahrens. Beispielsweise nimmt die Resolvente für eine Gleichung 5. Grades sechs verschiedene Werte an – die Situation verschlechtert sich also.

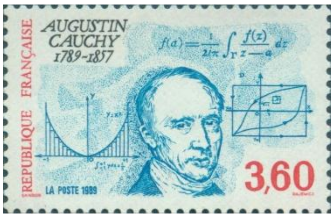
Es scheint so, als hätte sich kein Mathematiker vor Ruffini getraut, die Konsequenz aus dieser Einsicht zu ziehen: Für Gleichungen höheren als 4. Grades existiert kein allgemeines Lösungsverfahren in Radikalen.

Ruffini erkennt, dass dies mit der Struktur der Lösungsmengen zusammenhängt. Dazu untersucht er als Erster systematisch Mengen von Permutationen und entdeckt erste gruppentheoretische Sätze, wie z. B. die Teilbarkeit hinsichtlich der Anzahl der Elemente von Gruppen und ihrer Untergruppen. 1799 veröffentlicht er die Schrift *Teoria generale delle equazioni*, in der er seine Einsichten darlegt und einen ersten Beweis für seine Behauptung führt.

Ein Exemplar des Werkes sendet er an seinen „Landsmann" Lagrange (der in Turin geborene Mathematiker trug ursprünglich den Namen Giuseppe Lodovico Lagrangia), der jedoch nicht reagiert. Ruffini vermutet, dass das Buch wegen der unsicheren politischen Verhältnisse nicht bei Lagrange angekommen ist, und schickt ihm ein zweites Exemplar. Aber auch diesmal antwortet Lagrange nicht.

1803 veröffentlicht Ruffini einen zweiten, strengeren und – wie er hofft – leichter verständlichen Beweis. Erste positive Rückmeldungen ermutigen ihn, weitere Verbesserungen hinsichtlich der Argumentationen im Beweis vorzunehmen (insgesamt veröffentlicht er fünf Versionen). Andere, wie beispielsweise Gianfrancesco Malfatti, der 1770 für einige spezielle Gleichungen 5. Grades ein Lösungsverfahren gefunden hatte, verstehen seinen Beweis nicht. Ruffini erreicht immerhin, dass die *Académie des sciences* die Vorstandsmitglieder Adrien-Marie Legendre, Sylvestre Lacroix und Lagrange beauftragt, die Beweisführung Ruffinis zu überprüfen. Nur Lagrange gibt eine Stellungnahme ab: Die Schrift enthalte zu wenig, das einer näheren Untersuchung wert sei. Immerhin erhält Ruffini von der *Royal Society* die Rückmeldung, dass sein Beweis wohl das belegt, was er behauptet. Aber obwohl der Inhalt seiner Entdeckung eigentlich sensationell ist, bleibt dies ohne weitere Konsequenzen.

Der Einzige, der zu Ruffinis Lebzeiten eine positive Stellungnahme abgibt, ist ausgerechnet Augustin Cauchy, der sonst nie ein Lob für Leistungen anderer übrig hat; er hält den Beweis für lückenlos. Vermutlich ist es die Arbeit Ruffinis, die Cauchy in den Jahren 1813 und 1815 zu seinen wichtigen Schriften über Permutationsgruppen anregt.



Nach der Niederlage Napoleons nimmt Ruffini seine Tätigkeit an der Universität wieder auf, hält Vorlesungen in Mathematik und in Medizin, vorübergehend ist er auch Rektor der Hochschule. Als 1817 eine Typhus-Epidemie durch das Land geht, widmet er sich ganz der Pflege seiner Patienten. Dabei infiziert er sich selbst, und trotz vorübergehender Genesung muss er seine Tätigkeit als Hochschullehrer schrittweise aufgeben. 1820 veröffentlicht er noch eine Abhandlung über die Typhus-Erkrankung und die – am eigenen Körper beobachteten – Auswirkungen der Krankheit (*Memoria del tifo contagioso*). 1822 infiziert er sich erneut – diesmal mit tödlichem Ausgang.

Dass Ruffinis mathematisches Werk zu seinen Lebzeiten nicht angemessen gewürdigt wurde und nach seinem Tod vorübergehend zunächst sogar in Vergessenheit geriet, hängt sicherlich mit der Tatsache zusammen, dass er seine Schriften in italienischer Sprache verfasste. Auch war die Zeit noch nicht reif für den revolutionären Gedanken, dass die Suche nach einem algebraischen Lösungsverfahren für Gleichungen höheren als 4. Grades aussichtslos ist, weil ein solches Verfahren *nicht existieren kann*. Und dass sich der schwer lesbare, aus heutiger Sicht lückenhafte Beweis wesentlich auf die Betrachtung der bis dahin noch nicht untersuchten Struktur von Permutationsgruppen stützte, war ebenfalls hinderlich. Auch Nils Henrik Abel, der die Schrift Ruffinis nicht kannte, hatte 1824 enorme Schwierigkeiten, seine Beweisführung des Satzes, der heute mit Recht als *Satz von Abel-Ruffini* bezeichnet wird, ins Bewusstsein der Mathematiker seiner Zeit zu bringen – auch Abels Werk erfährt die Anerkennung erst nach seinem Tod.