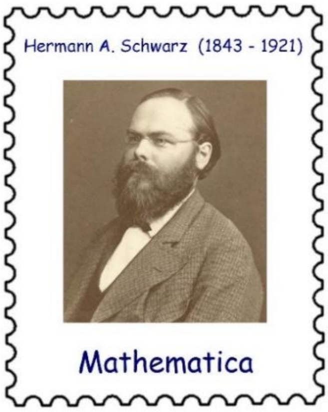
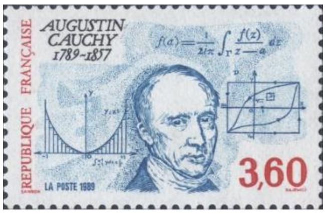
März 2023

Vor 180 Jahren geboren **HERMANN A. SCHWARZ** (25.01.1843 – 30.11.1921)



Der Name des Mathematikers HERMANN AMANDUS SCHWARZ wird wohl eher selten im Rahmen des Unterrichts der gymnasialen Oberstufe fallen, obwohl dies durchaus denkbar wäre.

Die Ungleichung $|\vec{u} * \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ wird als *CAUCHY-SCHWARZ'sche Ungleichung* bezeichnet; manchmal wird auch der Name BUNJAKOWSKIS hinzugefügt. Die Ungleichung spielt in der Geometrie (s. u.), in der Analysis und auch in der Statistik $[E(X \cdot Y)^2 \leq E(X^2) \cdot E(Y^2)]$ eine Rolle. Der französische Mathematiker AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY bewies 1821 die Ungleichung für Summen $(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} u_i^2) \cdot (\sum_{i=1}^{n} v_i^2)$. Der russische Mathematiker VIKTOR J. BUNJAKOWSKI formulierte sie 1859 für Integrale von komplex-wertigen Funktionen; der allgemeine Beweis hierzu erfolgte 1888 durch HERMANN AMANDUS SCHWARZ.

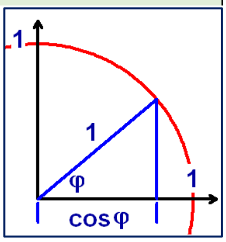


In der Vektorrechnung definiert man das Skalarprodukt $\vec{u} * \vec{v}$ zweier Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ als Summe der Produkte der Komponenten der beiden Vektoren: $\vec{u} * \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$.

Für die Länge der Vektoren gilt $|\vec{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \vec{u} * \vec{u}$ und $|\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \vec{v} * \vec{v}$.

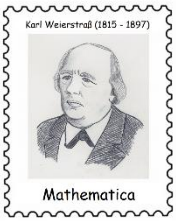
Mithilfe des Satzes von PYTHAGORAS kann dann bewiesen werden, dass gilt: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} * \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0$.

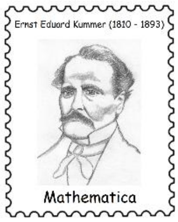
Hieraus folgt: $\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$, und wegen $0 \leq |\cos(\varphi)| \leq 1$ schließlich: $|\vec{u} * \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u} * \vec{u})} \cdot \sqrt{(\vec{v} * \vec{v})}$



HERMANN AMANDUS SCHWARZ beginnt nach seinem Schulbesuch an einem Gymnasium in Dortmund ein Studium der Chemie am Berliner Gewerbeinstitut (heute: Technische Universität). Nach dem Besuch der Vorlesungen von KARL WILHELM POHLKE, Professor für Darstellende Geometrie an der Berliner Bauakademie, wächst sein Interesse für Mathematik; 1861 hört er auch bei KARL WEIERSTRASS Vorlesungen zur Integralrechnung an der Universität Berlin.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		





Unter dem Einfluss von WEIERSTRASS und auch von ERNST EDUARD KUMMER wechselt SCHWARZ zur Mathematik. Bereits 1864 promoviert er bei KUMMER mit einer Arbeit über *abwickelbare* Flächen (*De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum*), das sind Flächen, die sich ohne Verzerrung der Form in eine Ebene transformieren lassen – Beispiele hierfür sind Flächenstücke aus der Mantelfläche eines Zylinders oder eines Kegels.

Nach der Promotion setzt SCHWARZ sein Studium fort, um die Unterrichtsbefähigung für Mittelschulen zu erlangen; gleichzeitig unterrichtet er an verschiedenen Berliner Gymnasien. 1867 folgt seine Habilitation und die Übernahme einer Stelle als Privatdozent an der Universität Halle. 1869 wird er auf eine Professorenstelle am Polytechnikum in Zürich berufen (heute: ETH); 1875 nimmt er einen Ruf nach Göttingen auf die Stelle an, die zuvor u. a. CARL-FRIEDRICH GAUSS, GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET und BERNHARD RIEMANN innehatten. Die Schwerpunkte der Gebiete, über die er forscht und die er lehrt, sind komplexe Analysis, Differenzialgeometrie und Variationsrechnung (Bestimmung von Maxima und Minima von Funktionen im mehrdimensionalen Raum).

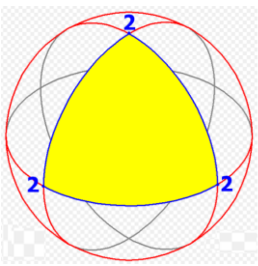
Die Beiträge von SCHWARZ zu verschiedenen Gebieten der Mathematik sind vielfältig, insbesondere regen sie andere Mathematiker zu weiteren Untersuchungen an:

– Bereits während seiner Studienzeit beweist er einen Satz, den POHLKE vermutet hatte, aber nicht exakt beweisen konnte (*Hauptsatz der Axonometrie*). Aus diesem Satz folgt u. a.: *Jedes in einer Ebene liegende Viereck kann als das durch eine Parallelprojektion entstandene Bild eines Tetraeders aufgefasst werden.*

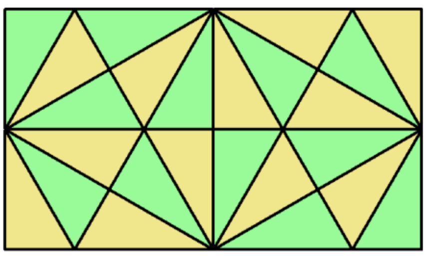
– In der Analysis untersucht er u. a. sog. *konforme* (winkeltreue) Abbildungen. Nach ihm ist das *SCHWARZ'sche Lemma* benannt, welches besagt, dass für *jede* komplexe differenzierbare Funktion f mit $f(0)=0$, die die offene Einheitskreisscheibe in der GAUSS'schen Zahlenebene auf sich selbst abbildet, gilt: $|f(z)|\leq|z|$ sowie $|f'(0)|\leq 1$.

– ALEXIS-CLAUDE CLAIRAUT hatte 1740 vermutet, dass die Reihenfolge, in der die zweite partielle Ableitung einer Funktion mehrerer Variablen gebildet wird, keine Rolle spielt, d. h., dass also gilt: $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y))=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y))$. SCHWARZ beweist 1873, dass die Stetigkeit der Ableitungen vorausgesetzt werden muss, und gibt selbst ein Gegenbeispiel an: $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2})(0,0)=1$; $\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2})(0,0)=-1$.

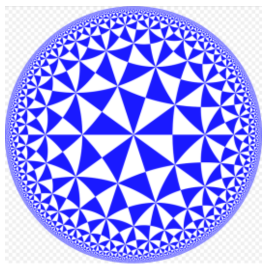
– Im selben Jahr veröffentlicht er die Klassifizierung von Dreiecken, mit denen die Kugeloberfläche, die euklidische bzw. die hyperbolische Ebene parkettiert werden kann (*SCHWARZ'sche Dreiecke*): Für positive rationale Zahlen p,q,r existieren Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{p},\frac{\pi}{q},\frac{\pi}{r}$ auf der Kugel, falls $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$, in der (euklidischen) Ebene, falls $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$, sowie in der hyperbolischen Ebene, falls $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$.



$p=q=r=2$

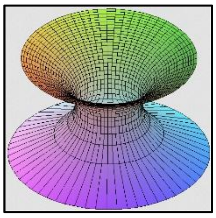


$p=6, q=3, r=2$

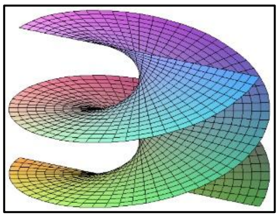


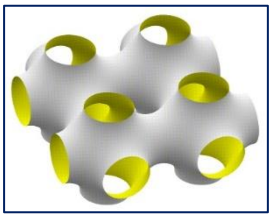
$p=5, q=4, r=2$

– Seit den 1830er Jahren war das Interesse der Mathematiker an der Untersuchung von Minimalflächen gewachsen, nachdem der belgische Physiker Joseph Antoine Plateau Seifenhaut-Versuche durchgeführt und so Oberflächen mit minimalem Flächeninhalt experimentell bestimmt hatte. Zuvor hatte bereits Leonhard Euler im Jahr 1744 einen ersten Beitrag zu dem Thema geliefert (*Katenoid*, Abb. links) und



1755 der erst 19-jährige Joseph-Louis Lagrange die zugehörigen Bedingungen formuliert (*Euler-Lagrange-Gleichungen*). 1776 führte Jean-Baptiste Meusnier de la Place den Nachweis, dass die *Wendelfläche* (Abb. rechts) diese Gleichungen erfüllt, außerdem, dass die mittlere





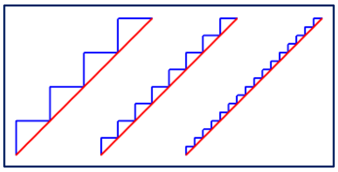
Krümmung bei Minimalflächen gleich null sein muss. In den 1880er Jahren untersucht Schwarz zusammen mit seinem Student Edvard Rudolf Neovius periodische Minimalflächen; die Abb. links zeigt hierzu ein einfaches Beispiel.

(Abbildungen Wikipedia)

– 1884 vervollständigt Schwarz den Beweis von Jakob Steiner, dass unter allen Körpern mit fester Oberfläche die Kugel das größte Volumen hat: *In der Menge der stetig differenzierbaren, einfach geschlossenen, orientierbaren Flächen vom Geschlecht Null (das sind Flächen ohne Löcher) ist die Kugel die Fläche, die bei gegebener Oberfläche den größten Rauminhalt umgrenzt.*

– Anlässlich des 70. Geburtstages seines verehrten Lehrers Karl Weierstrass im Jahr 1885 veröffentlicht Schwarz den ersten vollständigen Beweis (in der sprichwörtlichen „*Weierstrass'schen Strenge*") dafür, dass die *Minimalflächen* tatsächlich minimalen Flächeninhalt haben.

– Bereits seit Längerem war das sog. *Treppenparadoxon* bekannt: Bei dem Ansatz, die Länge einer Strecke mithilfe eines Streckenzuges in der Gestalt einer Treppe zu



bestimmen, ergibt sich bei der Grenzwertbildung der Länge des Streckenzuges nicht die Länge der Strecke. Schwarz entwickelt mit dem sog. *Schwarz'schen Stiefel* ein 3-dimensionales Analogon: Die Mantelfläche eines Zylinders wird hierbei durch Ringe von Antiprismen aus stumpfwinkligen gleichschenkligen Dreiecken approximiert. Durch sein Beispiel zeigt er, dass die bis dahin in Standardwerken zur Analysis enthaltene Methode zur Bestimmung des Flächeninhalts von gekrümmten Flächen mithilfe von Polyeder-Folgen *nicht* ausreicht.

(Foto: Deutsches Technikmuseum Berlin)

Nach der Emeritierung von Weierstrass wechselt Schwarz 1892 auf dessen Lehrstuhl an der *Friedrich-Wilhelms-Universität* in Berlin (heute: *Humboldt-Universität*), den er bis zu seinem eigenen Eintritt in den Ruhestand im Jahr 1917 wahrnimmt, und fördert dort engagiert zahlreiche Studenten – wie bereits zuvor in Göttingen.

Aus seiner Ehe mit einer Tochter Kummers gehen sechs Kinder hervor. Er liebt es, in seiner Freizeit eine Brigade der örtlichen freiwilligen Feuerwehr zu leiten und dem Vorsteher des benachbarten Bahnhofs bei der Abfertigung von Zügen zu helfen.