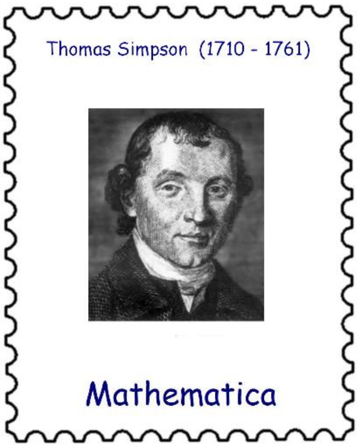
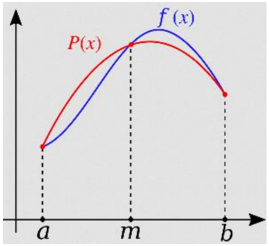
# Juni 2022

Vor 261 Jahren starb **THOMAS SIMPSON** (20.08.1710 – 14.05.1761)




Zwei Regeln der Integralrechnung erinnern an den englischen Mathematiker THOMAS SIMPSON:

Bei der sog. $\frac{1}{3}$-Regel werden die Funktionswerte am Anfang, in der Mitte sowie am Ende des Integrationsintervalls dazu verwendet, um den Graphen der betrachteten Funktion $f$ durch eine quadratische Parabel $P$ zu approximieren und so den Inhalt der Fläche zwischen Graph und $x$-Achse näherungsweise zu bestimmen:




$$\int_a^b f(x)dx \approx \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot\left[f(a)+4\cdot f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right],$$

wobei $h=\frac{b-a}{2}$ gleich dem jeweiligen Abstand der *drei* Stützstellen $a, m=\frac{a+b}{2}, b$ ist, vgl. Wikipedia-Abb. rechts von Popletibus.

Bei der sog. $\frac{3}{8}$-Regel von SIMPSON werden *vier* Stützstellen betrachtet und entsprechend eine Approximation durch eine kubische Parabel untersucht. Hier gilt:

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}\cdot h\cdot\left[f(a)+3\cdot f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3\cdot f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]$, wobei $h=\frac{b-a}{3}$ gleich dem jeweiligen Abstand der *vier* Stützstellen $a, \frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}, b$ ist. Dieser Ansatz lässt sich verallgemeinern.

Die Idee der $\frac{1}{3}$-Regel liegt auch der sog. Fassregel von JOHANNES KEPLER (1571-1630) zugrunde (näherungsweise Volumenbestimmung eines Fasses durch Rotation einer quadratischen Parabel).


THOMAS SIMPSON selbst gibt an, dass er die Formel bei ISAAC NEWTON gefunden habe, d. h., eigentlich müsste die Regel den Namen NEWTONS tragen. Andererseits war THOMAS SIMPSON der Erste, der die üblicherweise als NEWTON-Formel bezeichnete Rekursionsgleichung $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstelle einer differenzierbaren Funktion $f$ veröffentlichte (im Jahr 1740, 13 Jahre nach NEWTONs Tod).


| MO | DI | MI | DO | FR | SA | SO |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | | | |

Thomas Simpson wird als Sohn eines Webers in Market Bosworth, Leicestershire, geboren. Dort besucht er eine Schule, an der er aber wohl kaum mehr als Lesen, Schreiben und einfaches Rechnen lernt. Zunächst arbeitet er – wie sein Vater – als Weber, bis ihm im Alter von 14 Jahren das Arithmetikbuch von Edward Cocker in die Hände fällt, das nach der Veröffentlichung im Jahr 1678 über 100 Auflagen hatte. Das Buch arbeitet er selbstständig durch – offensichtlich erfolgreich, denn bereits im folgenden Jahr kann der 15-Jährige sein Elternhaus verlassen, um im benachbarten Ort Nuneaton (Warwickshire) als Mathematiklehrer tätig zu werden.

Im Alter von 19 Jahren heiratet Simpson eine Witwe, deren Sohn aus erster Ehe älter ist als der neue Ehemann. In dieser Ehe werden später zwei Kinder geboren.

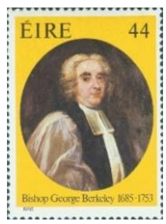
In der Zwischenzeit hat Simpson auch Werke zur Astrologie durchgearbeitet; einen Teil seiner Einkünfte verdient er sich nunmehr als Wahrsager – bis er eines Tages den Bogen überspannt und während einer Sitzung den Teufel erscheinen lässt …

Nach diesem „Skandal" kann er nicht mehr in Nuneaton bleiben. Er flieht nach Derby, wo er wieder als Weber tätig ist, und er gibt Rechenunterricht an einer Abendschule.

1736 zieht er nach London, wo er der *Spitalfields Mathematical Society* beitritt, ein Zusammenschluss von interessierten Handwerkern, die meisten von ihnen sind Weber.

Seinen Lebensunterhalt verdient Simpson als Mathematiklehrer an *Penny Universities*, das sind Kaffeehäuser, in denen man sich gegen die Bezahlung eines Eintrittsgelds von *einem Penny* Vorträge anhören kann, auch zu rechtlichen und künstlerischen Themen. Auch Abraham de Moivre muss sich auf diese Weise seinen Lebensunterhalt verdienen, da es ihm als französischem Emigrant – trotz Newtons Unterstützung – nicht gelingt, eine feste Anstellung zu finden.

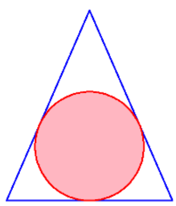

Noch im selben Jahr veröffentlicht Simpson erste Beiträge im *The Ladies Diary* (*Woman's Almanack – entworfen für den Brauch und die Abwechslung des schönen Geschlechts*), einem vielgelesenen Jahreskalender mit Rätseln aller Art, interessanten Nachrichten aus der Wissenschaft und mathematischen Problemen. Einer der Artikel beschäftigt sich mit *Fluxionen*, einem Thema, das – wegen der lautstarken Kritik des Bischofs George Berkeley – auf großes Interesse bei den Leserinnen stößt.




Simpson stellt unter Beweis, dass er die Newton'sche Differenzialrechnung verstanden hat: 1737 erscheint das anspruchsvolle Werk *Treatise of Fluxions*, in dem u. a. die o. a. Simpson'sche Regel und die Newton'sche Formel enthalten sind, außerdem 22 Anwendungsaufgaben, in denen er mithilfe der Nullstellen der Ableitung Maxima und Minima bestimmt, beispielsweise:

Gesucht ist …

– unter allen rechtwinkligen Dreiecken mit fester Hypotenuse das flächengrößte,
– unter allen gleichschenkligen Dreiecken, deren Seiten einen vorgegebenen Kreis berühren, das flächenkleinste,
– unter allen Kegeln mit gleicher Oberfläche der volumenkleinste,
– die minimale Entfernung zweier Körper, die sich jeweils mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig von zwei Orten aus bewegen,
– die Richtung eines Bootes, das einem vorbeifahrenden Schiff möglichst nahe kommen soll.

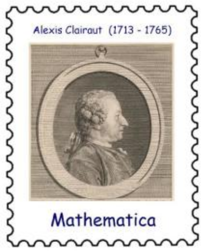


1740 folgt *The Nature and Laws of Chance*, 1742 *The Doctrine of Annuities and Reversions* zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und über die Berechnung von Versicherungsbeiträgen. Im Vorwort lobt Simpson das 1738 in 2. Auflage erschienene Werk *Doctrine of Chances* von de Moivre als *excellent book*. de Moivre allerdings beklagt die zahlreichen Übereinstimmungen mit seinem Buch, vor allem aber, dass er, der auf den Verkauf seines Buches angewiesen ist, starke Einnahmeverluste habe.
Weitere Bücher folgen: *A treatise of Algebra* (1745, mit insgesamt 16 Auflagen auch in anderen Sprachen), *Elements of Plane Geometry* (1747, konzipiert als Schulbuch), *Trigonometry – Plane and Spherical* (1748, mehrere Auflagen, auch in Französisch).

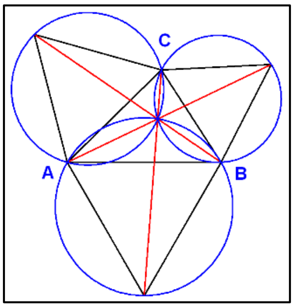
In der Zwischenzeit ist Simpson zum Leiter der Mathematikabteilung der *Royal Military Academy* in Woolwich berufen worden (1743), einer Einrichtung für zukünftige Offiziere der *Royal Artillery* und der *Royal Engineers*. Von diesem Zeitpunkt an beschäftigt sich Simpson stärker auch mit der Lösung technischer Probleme, etwa dem Bau von Befestigungsanlagen und einer Brücke über die Themse.

1745 wird Simpson Mitglied der *Royal Society*, 1758 auch Mitglied der Schwedischen Akademie der Wissenschaften. Von 1754 an ist er Herausgeber von *The Ladies Diary*, eine Tätigkeit, die wegen der umfangreichen Korrespondenz sehr aufwendig ist.

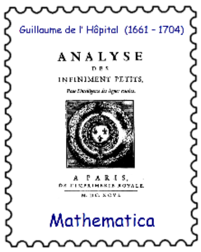
In den Folgejahren verfasst er weitere Bücher: *Doctrine and Application of Fluxions* (1750, erweiterte Ausgabe in zwei Bänden), *Selected Exercises in Mathematics* (1752), *Miscellaneous Tracts on Some Curious Subjects in Mechanics* sowie *Physical Astronomy and Speculative Mathematics* (1757).




Das letzte Werk enthält u. a. eine Untersuchung der Umlaufbahn des Mondes; zur Bestimmung des erdfernsten Punkts (*Apogäum*) stellt er – zur gleichen Zeit wie Alexis Clairaut und unabhängig von diesem – eine Differenzialgleichung auf und löst sie allgemein.




Das Buch enthält auch eine Lösung eines Problems, das Pierre de Fermat im Jahr 1646 an Evangelista Torricelli stellte: Gesucht ist ein Punkt D, dessen Summe der Abstände von drei Punkten $A$, $B$, $C$ minimal ist. Torricelli zeigte: Errichtet man über den drei Seiten des Dreiecks $ABC$ gleichseitige Dreiecke, dann schneiden sich deren Umkreise in dem gesuchten Punkt (sog. Torricelli-Punkt oder Fermat-Punkt). Simpson bewies: Verbindet man die Eckpunkte des Dreiecks $ABC$ mit den Eckpunkten der gegenüberliegenden gleichseitigen Dreiecke, dann schneiden sich diese sog. Simpson-Linien im Torricelli-Punkt.




Die Vielzahl der Aktivitäten beeinträchtigt Simpsons Gesundheitszustand und führt letztlich zu seinem frühen Tod.
Nach der Lektüre von Guillaume de L'Hôpital's *Analyse des infiniment petits* über die Leibniz'sche Differenzialrechnung ist ihm, dem Verfasser eines der profiliertesten Bücher zur Newton'schen Lehre, bewusst geworden, dass die englischen Mathematiker dabei sind, den Anschluss an die Entwicklung auf dem Kontinent zu verlieren – mahnend schreibt er: *„Foreign Mathematicians have, of late, been able to push their Researches farther, in many particulars, than Sir Isaac Newton and his Followers here, have done …"*

**Ergänzung zum Kalenderblatt über THOMAS SIMPSON**

- *Zur Herleitung der SIMPSON'schen Regel* ( $\frac{1}{3}$ *-Regel*)

Gesucht ist eine quadratische Funktion *p* mit $p(x) = rx^2 + sx + t$ mit

$f(a) = p(a) = ra^2 + sa + t$, $f(b) = p(b) = rb^2 + sb + t$ und

$f(\frac{a+b}{2}) = p(\frac{a+b}{2}) = r \cdot (\frac{a+b}{2})^2 + s \cdot \frac{a+b}{2} + t = \frac{1}{4} r \cdot (a^2 + 2ab + b^2) + \frac{1}{2} s \cdot (a+b) + t$.

Der letzte Term kann umgeformt werden:

$f(\frac{a+b}{2}) = \frac{1}{4} \cdot (ra^2 + 2rab + rb^2 + 2sa + 2sb + 4t) = \frac{1}{4} \cdot (f(a) + f(b) + 2rab + sa + sb + 2t)$,

also $4 \cdot f(\frac{a+b}{2}) - f(a) - f(b) = 2rab + sa + sb + 2t$.

Für das bestimmte Integral von $p(x)$ über dem Intervall $[a;b]$ gilt daher

$$\int_a^b p(x)dx = \frac{1}{3} r \cdot (b^3 - a^3) + \frac{1}{2} s \cdot (b^2 - a^2) + t \cdot (b-a)$$
$$= (b-a) \cdot \left[ \frac{1}{3} r \cdot (b^2 + ab + a^2) + \frac{1}{2} s \cdot (b+a) + t \right]$$
$$= \frac{1}{6} \cdot (b-a) \cdot \left[ 2rb^2 + 2rab + 2ra^2 + 3sb + 3sa + 6t \right]$$
$$= \frac{1}{6} \cdot (b-a) \cdot \left[ (2ra^2 + 2sa + 2t) + (2rb^2 + 2sb + 2t) + (2rab + sa + sb + 2t) \right]$$
$$= \frac{1}{6} \cdot (b-a) \cdot \left[ 2 \cdot f(a) + 2 \cdot f(b) + (2rab + sa + sb + 2t) \right]$$
$$= \frac{1}{6} \cdot (b-a) \cdot \left[ 2 \cdot f(a) + 2 \cdot f(b) + 4 \cdot f(\tfrac{a+b}{2}) - f(a) - f(b) \right]$$
$$= \frac{1}{6} \cdot (b-a) \cdot \left[ f(a) + f(b) + 4 \cdot f(\tfrac{a+b}{2}) \right]$$

- *Zur Entwicklung des NEWTON'schen Näherungsverfahrens*

In seiner Arbeit *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (*Von der Methode der Fluxionen und unendlichen Folgen*), entstanden zwischen 1664 und 1671, erläuterte NEWTON den folgenden Ansatz zur näherungsweisen Lösung einer Gleichung dritten Grades am Beispiel $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Setzt man für *x* den Wert 2 ein, so erhält man ein negatives Ergebnis: $2^3 - 2 \cdot 2 - 5 = -1$.

Ansatz mit $x = 2 + h$: $(2+h)^3 - 2 \cdot (2+h) - 5 = 8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 4 - 2h - 5 = h^3 + 6h^2 + 10h - 1$

Vernachlässigt man den kubischen und den quadratischen Term, so ergibt sich die lineare Gleichung $10h - 1 = 0$, also $h = \frac{1}{10}$. Eine erste Näherungslösung ist daher $x \approx 2{,}1$.

JOSEPH RAPHSON (1678-1715) untersuchte allgemein die kubische Gleichung $x^3 - bx + c = 0$, für die *g* eine erste Näherungslösung ist. Dann gilt für $x = g + h$:

$$(g+h)^3 - b \cdot (g+h) + c = g^3 + 3g^2h + 3gh^2 + h^3 - bg - bh + c$$
$$= (g^3 - bg + c) + h^3 + 3gh^2 + h \cdot (3g^2 - b)$$

Vernachlässigt man den kubischen und den quadratischen Term, so ergibt sich die lineare Gleichung

$(g^3 - bg + c) + h \cdot (3g^2 - b) \approx 0$, also $h \approx -\dfrac{g^3 - bg + c}{3g^2 - b}$.

Mit $f(x) = x^3 - bx + c$ ergibt sich daher $f(x) \approx 0$ für $x \approx g - \dfrac{f(g)}{f'(g)}$.