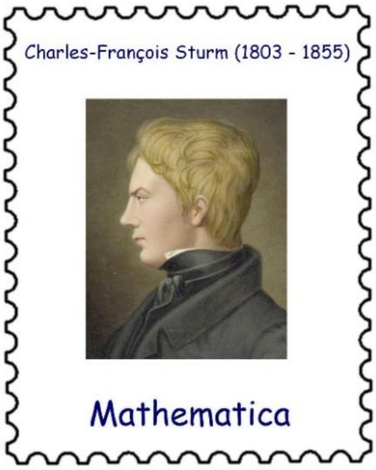
September 2023

Vor 220 Jahren geboren **CHARLES-FRANÇOIS STURM** (29.09.1803- 18.12.1855)



Er gehört zu den 72 berühmten Wissenschaftlern und Ingenieuren, deren Namen GUSTAV EIFFEL im Jahr 1889 – einhundert Jahre nach der französischen Revolution – in goldenen Lettern auf den Friesen der ersten Etage des von ihm erbauten Turms in Paris anbringen ließ.
1836 wurde der Mathematiker zum Nachfolger von ANDRÉ-MARIE AMPÈRE als Mitglied in die *Académie des Sciences* gewählt. Auch war er korrespondierendes Mitglied in der *Preußischen* und in der *Russischen Akademie der Wissenschaften* (1835/36) sowie in der *Royal Society* (1840), die ihm sogar die COPLEY-Medaille verlieh.
Die Rede ist von JACQUES CHARLES FRANÇOIS STURM, der 1803 in Genf geboren wurde – nach der Annektierung durch französische Truppen in Jahr 1798 Hauptstadt des neu gegründeten Départements *Léman*. Nach dem Wiener Kongress wurde die Region um Genf als 22. Kanton in die Schweizer Eidgenossenschaft aufgenommen.
STURMS Familie stammte ursprünglich aus der Gegend um Straßburg. CHARLES FRANÇOIS' Vater sorgte durch seine Tätigkeit als Lehrer für Arithmetik für den Unterhalt der Familie. Während seiner Schulzeit zeigte CHARLES FRANÇOIS eher Interesse für Latein und Griechisch als für Mathematik. Um seine Deutschkenntnisse zu verbessern, besuchte er regelmäßig die Gottesdienste der Lutherischen Gemeinde, da die Predigten in deutscher Sprache gehalten wurden.
Nach Ende der Schulzeit verlagert sich CHARLES FRANÇOIS' Interesse von den alten Sprachen hin zur Mathematik. SIMON L'HUILLIER, sein erster Lehrer an der *Académie de Genève* (lat. *Schola Genevensis*, heute: *Université de Genève*) erkennt sofort das besondere Talent des jungen Studenten, berät und ermutigt ihn, stellt ihm sogar leihweise seine eigenen Bücher zur Verfügung; denn nach dem Tod von CHARLES FRANÇOIS' Vater ist die Familie in finanzielle Schwierigkeiten geraten.

Übrigens: Von L'HUILLIER stammt die heute in der Mathematik übliche Bezeichnung „lim" für die Grenzwertbildung bei Folgen und Funktionen; er verwendete sie in einem Beitrag zum Unendlichkeitsbegriff, für den er 1786 einen Preis der *Preußischen Akademie der Wissenschaften* erhielt. Außerdem untersuchte L'HUILLIER u. a. Sonderfälle und Verallgemeinerungen der EULER'schen Polyeder-Formel.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Nach L'Huilliers Emeritierung kümmert sich auch dessen Nachfolger Jean-Jacques Schaub um den begabten Studenten, der 1823 bei ihm das Examen ablegt. Aus finanziellen Gründen nimmt Sturm danach eine Stelle als Hauslehrer auf dem in der Nähe gelegenen *Château de Coppet* an, das im Besitz des Herzogs Victor de Broglie und seiner Frau Albertine de Staël-Holstein (jüngste Tochter der Madame de Staël) ist. Zunächst ist Sturm unzufrieden mit seiner Lebenssituation, merkt jedoch bald, dass ihm seine Tätigkeit genügend freie Zeit lässt, um eigenen mathematischen Untersuchungen nachzugehen. Erste Artikel zur Geometrie erscheinen in den *Annales de mathématiques pures et appliquées*. Als die herzogliche Familie für ein halbes Jahr nach Paris zieht, folgt er ihnen. Über den Herzog de Broglie lernt er Alexander von Humboldt kennen, der ihn in den Gesprächskreis um François Arago einführt – so lernt er u. a. Laplace, Poisson, Fourier, Gay-Lussac und Ampère kennen.

Nach der Rückkehr aus Paris setzt er zunächst noch seine Tätigkeit als Hauslehrer fort, beschließt dann, sich vollständig eigenen wissenschaftlichen Forschungen zu widmen. Zusammen mit seinem Studienfreund Daniel Colladon beschäftigt er sich mit der Lösung eines Problems, das die *Académie des Sciences* als Wettbewerb ausgeschrieben hat: *Wie groß ist die Kompressibilität von Wasser*?

In diesem Zusammenhang versuchen die beiden zunächst, durch Messungen im Genfer See die Geschwindigkeit des Schalls im Wasser zu bestimmen. Bei den eigentlichen Kompressionsexperimenten verletzt sich Colladon schwer. In Paris besuchen sie die Vorlesungen von Ampère, Gay-Lussac, Cauchy und Lacroix, um zunächst ihre theoretischen Kenntnisse zu verbessern. Dank der Unterstützung durch Arago, bei dem Sturm wohnen kann, dürfen sie für ihre Experimente die Laboratorien der Universität nutzen. Dennoch wird weder ihr Wettbewerbsbeitrag noch der anderer Teilnehmer als preiswürdig angesehen. Ein Jahr später (1827) – in der Zwischenzeit hat Ampère die beiden als seine Assistenten angestellt und die Experimente sind zufriedenstellend verlaufen – erhalten sie das ausgeschriebene Preisgeld der *Académie* in Höhe von 3000 Francs, wodurch ihr Lebensunterhalt für lange Zeit gesichert ist. Die von ihnen gemessene Schallgeschwindigkeit im Wasser von 1435 m/s weicht nur geringfügig vom (mit der Poisson-Formel) berechneten Wert ab (1437,8 m/s).

1829 präsentiert Charles François Sturm der *Académie* seinen berühmten Beitrag *Mémoire sur la résolution des équations numériques* (Anmerkungen zur numerischen Lösung von Gleichungen), auf den wir weiter unten eingehen.

Vergeblich bemühen sich Sturm und Colladon um feste Stellen bei staatlichen Bildungseinrichtungen – trotz der Unterstützung prominenter Mitglieder der *Académie* gelingt dies nicht, da sie Ausländer sind und zudem auch noch der protestantischen Konfession angehören. Dies ändert sich erst durch die politischen Veränderungen nach der Juli-Revolution 1830 – der neue Erziehungsminister ist Herzog Victor de Broglie: Sturm wird als Professor für *mathématiques spéciales* am *Collège Rollin* angestellt und Colladon für Mechanik an der *École Centrale des Arts et Manufactures*.

1833 nimmt Sturm die französische Staatsangehörigkeit an; eine im gleichen Jahr ausgesprochene Berufung auf eine Stelle an der *Académie de Genève* lehnt er ebenso ab wie ein Angebot der Universität in Gent. Seine Karriere geht nun steil aufwärts …

Nach dem Tod von AMPÈRE im Jahr 1836 werden STURM, LIOUVILLE, DUHAMEL, LAMÉ und BOUCHARLAT als Nachfolge-Kandidaten für die *Académie* vorgeschlagen. LIOUVILLE und DUHAMEL verzichten, weil sie STURM für geeigneter als sich selbst halten; so wird dieser mit großer Mehrheit als neues Mitglied aufgenommen. 1837 erfolgt STURMs Aufnahme in die Ehrenlegion (*chévalier de l'ordre national de la Légion d'honneur*).

Zusammen mit LIOUVILLE entwickelt er ein Lösungsverfahren für spezielle Differenzialgleichungen 2. Ordnung $\frac{d}{dx}[p(x)\cdot\frac{dy}{dx}]+q(x)\cdot y=-\lambda\cdot w(x)\cdot y$, die in der Wärmelehre eine besondere Rolle spielen (*STURM-LIOUVILLE-Theorie*). 1838 wird STURM *répétiteur* für Analysis, 1840 erhält er den Lehrstuhl für Analysis und Mechanik an der *École Polytechnique* und im selben Jahr wird er Nachfolger von POISSON an der Sorbonne.

Zehn Jahre lang hält STURM seine mit großer Sorgfalt ausgearbeiteten Vorlesungen zur Analysis und zur Theoretischen Mechanik, nach seinem Tod erscheinen sie in gedruckter Form und gelten noch lange Zeit als vorbildlich (jeweils 10 Auflagen).

Anfang der 1850er Jahre verschlechtert sich sein gesundheitlicher Zustand so dramatisch, dass der von seinen Studenten hochverehrte Lehrer nach und nach seine Verpflichtungen aufgeben muss. Seine Beerdigung auf dem Friedhof Montparnasse findet unter großer Anteilnahme von Vertretern aus Wissenschaft und Politik statt.

Als CHARLES FRANÇOIS STURM 1829 sein Verfahren zur Bestimmung der Anzahl der Nullstellen eines Polynoms vorstellte, äußerte CHARLES HERMITE die Vermutung, dass diese elegante und im Prinzip einfache Methode zukünftig eine große Rolle in der Lehre der Mathematik spielen würde – was sich allerdings als Irrtum erwies: STURM'sche Ketten wurden nie Lehrinhalt in der Schule und auch nicht in der Hochschule.

RENÉ DESCARTES hatte 1637 in *La Géométrie* eine einfache *Vorzeichenregel* aufgestellt:

- *Die Anzahl der positiven Nullstellen einer ganzrationalen Funktion f ist genauso groß wie die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge der Koeffizienten von f(x) oder um eine gerade Anzahl geringer. Die Anzahl der negativen Nullstellen ergibt sich aus dem Term für f(-x).*

Eine sog. STURM'sche Kette besteht aus einer Folge von Polynomen, beginnend mit $p_0(x)=f(x)$ und $p_1(x)=f'(x)$; die nächsten Glieder werden durch Termdivision gebildet: $p_n(x)=q_n(x)\cdot p_{n+1}(x)-p_{n+2}(x)$. Die Anzahl der Nullstellen in einem Intervall $]a;b]$ ergibt sich aus den Vorzeichen der Funktionswerte dieser Polynome an den Intervallgrenzen.

Im Folgenden soll an zwei Beispielen erläutert werden, welche Aussagen mithilfe der DESCARTES'schen bzw. der STURM'schen Regel getroffen werden können.

- Beispiel 1: *Wie viele Nullstellen hat die Funktion* f *mit* $f(x)=x^3-x^2-4x+5$?

Die Koeffizientenfolge von *f*(*x*) ist +1, -1, -4, +5; sie hat also zwei Vorzeichenwechsel. Gemäß dem DESCARTES'schen Kriterium hat der Graph demnach *zwei* oder *keine* positiven Nullstellen. Für $f(-x)=-x^3-x^2+4x+5$ ergibt sich die Koeffizientenfolge -1, -1, +4, +5; sie hat also *einen* Vorzeichenwechsel. Der Graph hat demnach *eine* Nullstelle im negativen Bereich. Insgesamt hat der Graph also *eine* oder *drei* Nullstellen.

Bilden einer STURM'schen Kette: $p_0(x)=f(x)=x^3-x^2-4x+5$, $p_1(x)=f'(x)=3x^2-2x-4$.

Weiter: $x^3-x^2-4x+5=(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9})\cdot(3x^2-2x-4)-\frac{1}{9}\cdot(26x-41)$, da es auf den Vorfaktor $\frac{1}{9}$ nicht ankommt, ist $\overline{p}_2(x)=26x-41$.

Schließlich: $3x^2 - 2x - 4 = (\frac{3}{26}x + \frac{71}{676}) \cdot (26x - 41) - (-\frac{207}{676})$, also $\overline{p}_3(x) = -\frac{207}{676} < 0$.

Hieraus ergibt sich für die Vorzeichen der STURM'SCHEN Polynome:

x	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
$p_0(x)$	< 0	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
$p_1(x)$	> 0	> 0	> 0	< 0	< 0	> 0	> 0
$p_2(x)$	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0	> 0	> 0
$p_3(x)$	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0
$\sigma(x)$	2	1	1	1	1	1	1

Somit folgt: Der Graph von f hat im Intervall

] -3 ; -2] genau σ(-3) – σ(-2) = 2 – 1 = 1 Nullstelle,
] -2 ; -1] genau σ(-2) – σ(-1) = 1 – 1 = 0 Nullstellen,
] -1 ; 0] genau σ(-1) – σ(0) = 1 – 1 = 0 Nullstellen,
] 0 ; +1] genau σ(0) – σ(+1) = 1 – 1 = 0 Nullstellen,
] +1 ; +2] genau σ(+1) – σ(+2) = 1 – 1 = 0 Nullstellen,
] +2 ; +3] genau σ(+2) – σ(+3) = 1 – 1 = 0 Nullstellen,

insgesamt also 1 Nullstelle im Intervall] -3 ; +3].

- Beispiel 2: *Wie viele Nullstellen hat die Funktion f mit* $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x + 6$ *?*

Die Koeffizientenfolge von *f*(*x*) ist +1, -1, -5, +2, +6; sie hat also zwei Vorzeichenwechsel. Gemäß dem DESCARTES'schen Kriterium hat der Graph demnach *zwei* oder *keine* positiven Nullstellen. Für $f(-x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 2x + 6$ ergibt sich die Koeffizientenfolge +1, +1, -5, -2, +6; sie hat also zwei Vorzeichenwechsel. Der Graph hat demnach *zwei* oder k*eine* Nullstelle im negativen Bereich. Insgesamt hat der Graph also *keine, zwei oder vier* Nullstellen.

STURM'SCHE Kette: $p_0(x) = f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x + 6$, $p_1(x) = f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 10x + 2$.

Weiter: $x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x + 6 = (4x^3 - 3x^2 - 10x + 2) \cdot (\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}) - \frac{1}{16} \cdot (43x^2 - 14x - 98)$, also $\overline{p}_2(x) = 43x^2 - 14x - 98$.

Und: $4x^3 - 3x^2 - 10x + 2 = (43x^2 - 14x - 98) \cdot (\frac{4}{43}x - \frac{73}{1849}) - \frac{32}{1849} \cdot (83x + 108)$, also: $\overline{p}_3(x) = 83x + 108$.

Schließlich: $43x^2 - 14x - 98 = (83x + 108) \cdot (\frac{43}{83}x - \frac{5806}{6889}) - \frac{48074}{6889}$, also: $\overline{p}_4(x) = 1$.

Hieraus ergibt sich für die Vorzeichen der STURM'SCHEN Polynome:

x	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
$p_0(x)$	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	< 0	> 0
$p_1(x)$	< 0	< 0	> 0	> 0	< 0	> 0	> 0
$p_2(x)$	> 0	> 0	< 0	< 0	< 0	> 0	> 0
$p_3(x)$	< 0	< 0	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
$p_4(x)$	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
$\sigma(x)$	4	4	2	2	2	1	0

Somit folgt: Der Graph von f hat im Intervall

] -3 ; -2] genau σ(-3) – σ(-2) = 4 – 4 = 0 Nullstellen,
] -2 ; -1] genau σ(-2) – σ(-1) = 4 – 2 = 2 Nullstellen,
] -1 ; 0] genau σ(-1) – σ(0) = 2 – 2 = 0 Nullstellen,
] 0 ; +1] genau σ(0) – σ(+1) = 2 – 2 = 0 Nullstellen,
] +1 ; +2] genau σ(+1) – σ(+2) = 2 – 1 = 1 Nullstelle,
] +2 ; +3] genau σ(+2) – σ(+3) = 1 – 0 = 1 Nullstelle,

insgesamt also 4 Nullstellen im Intervall] -3 ; +3].