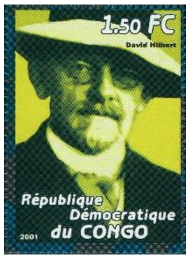
Februar 2022

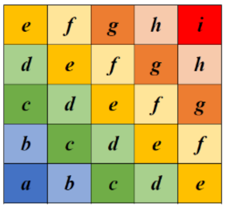
Vor 82 Jahren starb **OTTO TOEPLITZ** (01.08.1881–15.02.1940)

Als OTTO TOEPLITZ im Jahr 1881 in Breslau geboren wurde, war sein zukünftiger Werdegang fast schon vorhersehbar: Sowohl sein Großvater JULIUS als auch sein Vater EMIL waren als Mathematiklehrer an Gymnasien in Breslau bzw. in Lissa (Kreis Posen) tätig; auch hatten beide Beiträge zum Mathematikunterricht veröffentlicht. Darüberhinaus war EMIL TOEPLITZ im gesamten Deutschen Reich als Herausgeber des jährlich erscheinenden Philologenjahrbuchs (KUNZEs *Kalender*) bekannt, einem (bis heute existierenden) Verzeichnis aller an Gymnasien und vergleichbaren Einrichtungen tätigen Lehrpersonen.

Nach bestandener Abiturprüfung beginnt OTTO TOEPLITZ das Studium der Mathematik an der Universität Breslau. 1905 folgt seine Promotion über ein Thema aus der Algebraischen Geometrie (*Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlich vielen Veränderlichen*); danach wechselt er nach Göttingen, wo er sich 1907 habilitiert und als Privatdozent tätig wird.



Angeregt durch DAVID HILBERT beschäftigt er sich intensiv mit der Theorie der Integralgleichungen, worüber er mehrere Arbeiten verfasst, später auch einen Lexikonbeitrag für die *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*.



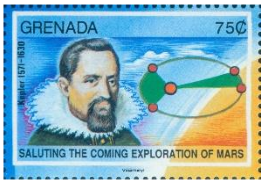
Im Jahr 1911 veröffentlicht TOEPLITZ einen Beitrag über Gleichungssysteme, deren Koeffizientenmatrix die in der Abb. links stehende Form hat. Im Falle endlicher Systeme treten also nur höchstens $2n-1$ statt n^2 verschiedene Koeffizienten auf; die Lösungsverfahren vereinfachen sich erheblich. Matrizen dieses Typs werden als *TOEPLITZ-Matrizen* bezeichnet.

1913 nimmt TOEPLITZ eine Stelle als *Außerordentlicher Professor* an der *Christian-Albrechts-Universität* in Kiel an; 1920 wird die Stelle in eine *Ordentliche Professur* umgewandelt. Für seine Lehramtsstudenten richtet der leidenschaftliche Hochschullehrer ein didaktisches Kolloquium ein, in dem insbesondere Themen aus der Mathematikgeschichte behandelt werden.

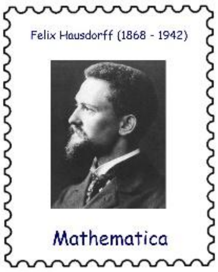
MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28						

1926 hält Toeplitz auf der Jahrestagung der *Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte* in Düsseldorf einen vielbeachteten Vortrag zum Analysisunterricht, in dem er dafür plädiert, die Schüler die historische Entwicklung der Analysis nachvollziehen zu lassen (sog. *genetische Methode*): *Die Mathematik und das mathematische Denken sind nicht nur Teil einer speziellen Wissenschaft, sondern auch eng mit unserer allgemeinen Kultur und ihrer historischen Entwicklung des mathematischen Denkens verbunden, eine Brücke zwischen den sogenannten Künsten und Wissenschaften und den scheinbar so unhistorischen exakten Wissenschaften kann gefunden werden ... Unser Hauptziel ist es, eine solche Brücke zu bauen. Nicht um der Geschichte willen, sondern um der Genese von Problemen, Fakten und Beweisen willen, um der entscheidenden Wendepunkte dieser Genese willen ...*

Um dieses Anliegen umzusetzen, plant Toeplitz ein zweibändiges Werk, kann dieses aber nicht mehr in die Tat umsetzen. 1949 erscheinen posthum die von Gottfried Koethe zusammengestellten Materialien als Buch mit dem Titel *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung – eine genetische Annäherung*, bestehend aus den *drei* Kapiteln *Das Wesen des unendlichen Prozesses; Das bestimmte Integral; Differential- und Integralrechnung*. Wegen der fehlenden Vorkenntnisse der Studienanfänger empfiehlt Toeplitz, den Grenzwertbegriff erst zu einem späteren Zeitpunkt exakt zu fassen, außerdem die Integralrechnung *vor* der Differenzialrechnung zu behandeln – entsprechend der historischen Entwicklung (Archimedes, Cavalieri, Fermat, Saint Vincent, ...). Das Buch endet mit Ausführungen zu den Kepler'schen Gesetzen.



Sein großes Interesse an historischen Zusammenhängen führt 1926 zur Gründung der Zeitschrift *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik* (zusammen mit Otto Neugebauer und Julius Stenzel).



1928 nimmt Toeplitz einen Ruf nach Bonn an, wo er bessere Arbeitsmöglichkeiten als in Kiel hat und wo auch eine größere Anzahl von Studenten eingeschrieben ist. An der Bonner Universität freundet er sich mit Felix Hausdorff an.

Zusammen mit seinem Assistenten Gottfried Köthe entwickelt er eine eigene Theorie unendlich-dimensionaler Räume, da ihm die Theorie des polnischen Mathematikers Stefan Banach zu abstrakt erscheint.

Auch mit dem Münsteraner Professor Heinrich Behnke steht Toeplitz im regen Austausch; von 1932 an erscheinen die *Mathematisch-Physikalischen Semesterberichte*, die sich – bis heute – insbesondere an Mathematiklehrkräfte richten.

Nach Inkrafttreten des Gesetzes zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums von 1933 kann der Professor jüdischer Herkunft seine Lehrtätigkeit zunächst fortsetzen, da eine Ausnahmeregelung für diejenigen Personen gilt, die bereits vor 1914 als Hochschullehrer tätig waren. Diese Regelung wird 1935 durch die Nürnberger Gesetze aufgehoben, und Toeplitz wird gegen seinen Willen in den Ruhestand versetzt.

Der bis dahin kaum praktizierende Jude Toeplitz übernimmt das Amt des Vorstehers in der jüdischen Gemeinde in Bonn. Er gründet eine Schule für jüdische Kinder, an der er auch selbst Unterricht übernimmt.

Als Leiter der Hochschulabteilung in der Reichsvertretung der Juden in Deutschland vermittelt er Stipendien für besonders begabte jüdische Studenten und organisiert deren Ausreise in die USA.

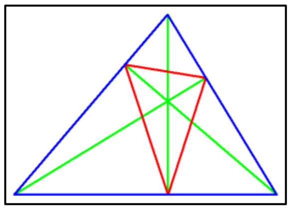
Als die Anzahl der Selbstmorde in seinem Umfeld dramatisch zunimmt und auch er selbst sich dem Druck durch die Nationalsozialisten nicht mehr gewachsen fühlt, emigriert er im Februar 1939 in das britische Mandatsgebiet Palästina. Dort beteiligt er sich sogleich am Aufbau der jüdischen Universität auf dem Mount Scopus in Jerusalem; aber ein Jahr nach seiner Ankunft erkrankt er schwer und stirbt.

Von seinen Studentinnen und Studenten wurde TOEPLITZ – ebenso wie von seinen Kollegen – als freundlicher und hilfsbereiter Mensch beschrieben, der sich stets Zeit für den anderen nahm. Im Laufe seiner Tätigkeit als Hochschullehrer betreute er insgesamt zwölf Doktoranden, darunter drei Frauen.

1930 erschien eine Sammlung von populären Themen aus seinen Vorträgen, das auch heute noch lesenswerte Buch *Von Zahlen und Figuren – Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik* (in Zusammenarbeit mit HANS RADEMACHER, Lehrstuhlinhaber in Breslau; der Pazifist RADEMACHER musste bereits 1934 emigrieren).

In 22 Abschnitten versuchen die beiden Autoren *die Scheidewand zu durchbrechen*, durch die die Nicht-Mathematiker von der Welt der Mathematiker getrennt sind.

Zu Beginn wird die geniale Idee des EUKLID'schen Beweises ausgebreitet, warum es unendlich viele Primzahlen gibt. Als Nächstes werden Aspekte erläutert, wie eine optimale Linienführung in einem Straßenbahn-Schienennetz entwickelt werden kann. Im dritten Abschnitt wird bewiesen, dass unter allen n-Ecken, die einem Kreis einbeschrieben sind, das regelmäßige den größten Flächeninhalt hat.

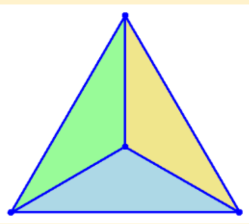
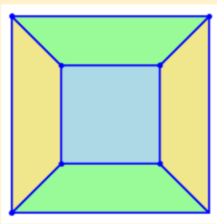
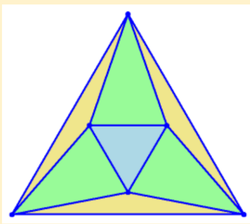
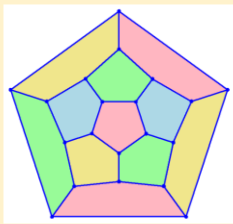
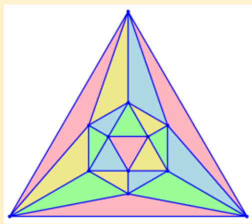


Auf den Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ folgen zwei anschauliche Beweise, dass unter allen Dreiecken, die einem Dreieck einbeschrieben werden können, das Dreieck der Höhenfußpunkte den kleinsten Umfang hat.

In Kap. 8 geht TOEPLITZ auf die CANTOR'schen Überlegungen zur Mächtigkeit von Mengen ein und spricht das *Kontinuumproblem* an. Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit den Schnitten am geraden Kreiskegel, gefolgt von einem Abschnitt über das WARING'sche Problem für $n = 2, 3, 4$: *Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von höchstens* $g(n)$ *Potenzen mit Exponent* n *darstellen, wobei* $g(2) = 4; g(3) = 9; g(4) = 19$.

In Abschnitt 10 beschäftigt sich TOEPLITZ mit Doppelpunkten von geschlossenen, sich selbst durchdringenden Kurven, in Kap. 11 wird gezeigt, dass die Zerlegung von natürlichen Zahlen in Primfaktoren in $\mathbb{N}$ eindeutig ist (mit einem Exkurs in Zahlenmengen, deren Elemente sich in der Form $a+b\cdot\sqrt{6}$ bzw. $a+b\cdot\sqrt{-6}$ darstellen lassen).

In Kap. 12 werden das Vierfarben-Problem und der EULER'sche Polyeder-Satz vorgestellt und Zusammenhänge erläutert.

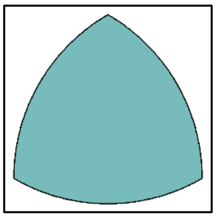






Kap. 13 widmet sich der Aussage der (im Jahr 1930 noch unbewiesenen) FERMAT'schen Vermutung; zunächst wird erläutert, wie man im Falle $n = 2$ alle pythagoreischen Zahlentripel findet, dann, warum die Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ keine Lösungen in $\mathbb{N}$ besitzt.

Im nächsten Abschnitt geht es um die Frage, wie groß der Radius eines Kreises höchstens gewählt werden muss, in dem alle Punkte eines gegebenen Punkthaufens liegen.

Der 15. Abschnitt beschäftigt sich mit der Annäherung von irrationalen Zahlen durch rationale Zahlen; u. a. wird gezeigt, dass $0 < \sqrt{2} - \frac{7}{5} < \frac{1}{5^2}; 0 < \frac{17}{12} - \sqrt{2} < \frac{1}{12^2}; 0 < \sqrt{2} - \frac{41}{29} < \frac{1}{29^2}; \ldots$

In Kap. 16 wird die Geradführung durch Gelenkmechanismen untersucht, im nächsten Abschnitt wird erläutert, was EUKLID und EULER über die vollkommenen Zahlen herausgefunden haben. Dann wird beschrieben, warum bei gegebenem Umfang der Kreis die Figur größten Flächeninhalts ist (Beweisidee nach JACOB STEINER).



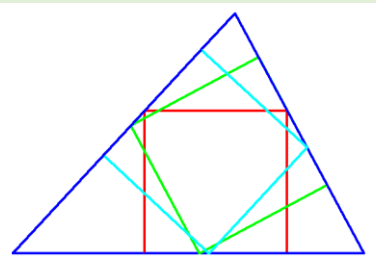
Kap. 19 befasst sich mit den periodischen Dezimalbrüchen, Kap. 20 mit Kurven konstanter Breite. Das vorletzte Kapitel ist der Frage der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal gewidmet, und bei welchen Konstruktionen man auf den Zirkel oder auf das Lineal verzichten kann.

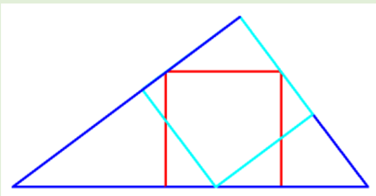
Zum Abschluss beschäftigt sich TOEPLITZ noch einmal mit Primzahlen und deren Wachstum. Es zeigt sich, dass die Zahl 30 die größte Zahl ist, für die gilt, *dass alle unter ihr gelegenen, zu ihr teilerfremden Zahlen Primzahlen sind*. Für die Folge der Primzahlen gilt: $2^2 > 1; 3^2 > 2; 5^2 > 2 \cdot 3 = 6; 7^2 > 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, aber dann wechselt die Richtung des Ungleichheitszeichens: $11^2 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210; 13^2 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310; \ldots$

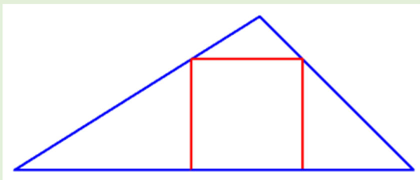
Von OTTO TOEPLITZ stammt eine Vermutung aus dem Jahr 1911, die bis heute für viele Typen von Kurven, aber noch nicht allgemein bewiesen werden konnte:

- *In jede geschlossene JORDAN-Kurve C (d. i. eine stetige, sich nicht überschneidende ebene Kurve) kann man ein Quadrat einbeschreiben.*

Beispiele: Ist C ein Dreieck, dann kann man – je nachdem, ob es sich um ein spitzwinkliges, ein rechtwinkliges oder ein stumpfwinkliges Dreieck handelt – ein bzw. zwei bzw. drei Quadrate einzeichnen, deren Eckpunkte auf der Umfangslinie liegen.







Ist C ein Kreis oder ein Quadrat, dann kann man *unendlich viele* Quadrate einzeichnen, ist C ein regelmäßiges Sechseck, dann *drei* Quadrate, ist C ein Oval, dann *ein* Quadrat.