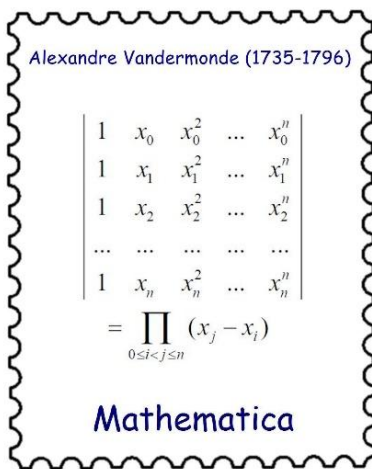


September 2026

Vor 230 Jahren starb **Alexandre Vandermonde** (28.02.1735 - 01.01.1796)



Er hatte vielseitige Interessen und Begabungen, er gehörte zu den aktiven und gestaltenden Persönlichkeiten in den Jahren der französischen Revolution; er war Jurist, Musiker, Mathematiker, Chemiker, Physiker, Mechaniker und am Ende seines Lebens der Inhabers des ersten offiziellen Lehrstuhls für politische Ökonomie in Frankreich. Dennoch existiert von ihm kein Porträt. Nach ihm benannt ist eine besondere Form einer Determinante (vgl. Mathematica-Briefmarke links) sowie eine Gleichung aus der Kombinatorik - auch wenn er beide nicht so angegeben hatte, wie es heute üblich ist.

Die Rede ist von ALEXANDRE-THÉOPHILE VANDERMONDE, geboren 1735 in Paris, wo er auch am Neujahrstag 1796 starb.

Sein Vater war der Arzt JACQUES-FRANÇOIS VANDERMONDE, bis 1732 im Dienst der französischen *Compagnie des Indes* in Macau. Dem Vater war 1727 in erster Ehe ein Sohn namens CHARLES geboren worden; ALEXANDRE-THÉOPHILE stammte aus der zweiten Ehe des Mediziners, die dieser nach seiner Rückkehr nach Frankreich einging. CHARLES studierte wie sein Vater Medizin; er starb am Vorabend seiner Hochzeit im Jahre 1762. Auch ALEXANDRE-THÉOPHILE blieb unverheiratet und blieb ohne Nachkommen.

Der etwas kränkliche ALEXANDRE-THÉOPHILE studierte Jura an der Universität von Paris und absolvierte beide Examina. Dank des Vermögens seines bereits 1746 verstorbenen Vaters und später dann als Erbe seines Halbbruders war er nicht auf die Ausübung eines Berufs angewiesen. Zunächst widmete er sich vor allem der Musik und auch einer möglichen Karriere als sehr begabter Geiger.

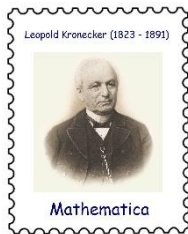


Er pflegte regen Kontakt mit den Enzyklopädisten DENIS DIDEROT und JEAN-BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT und lernte so auch zeitgenössische Mathematiker kennen.



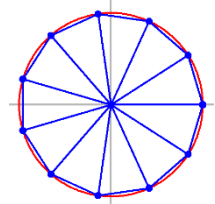
Etwas überraschend wurde er 1771 als Mitglied in die *Académie des sciences* aufgenommen. Grund hierfür war die von ihm eingereichte Abhandlung *Mémoire sur la résolution des équations*, in der er nach Möglichkeiten suchte, Formeln für die Lösung von Gleichungen fünften und höheren Grades zu finden.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				



Mit seinem Ansatz gelang es ihm allerdings nur, spezielle Gleichungen aufzulösen.

Die Bedeutung des VANDERMONDE'schen Ansatzes wurde wegen der rasanten Entwicklung der Theorie in den Folgejahren nur wenig gewürdigt. Erst LEOPOLD KRONECKER stellte 1888 rückblickend fest, dass durch diesen der Grundstein für die moderne Algebra gelegt wurde: Die Fortschritte hinsichtlich der Lösbarkeit von Gleichungen, die im Folgenden durch die Resolventenmethode von JOSEPH-LOUIS LAGRANGE sowie später durch NIELS HENDRIK ABEL und EVARISTE GALOIS erzielt wurden, fanden im Beitrag VANDERMONDES ihren Anfang. Im Rahmen seiner Untersuchungen gelang es ihm auch, gewisse Kreisteilungsgleichungen zu lösen, darunter $x^{11} - 1 = 0$; den Zusammenhang mit der Konstruierbarkeit von regelmäßigen Polygonen erkannte erst CARL FRIEDRICH GAUSS.



In den folgenden Jahren legte VANDERMONDE der Académie noch eine weitere Abhandlung vor (*Mémoire sur l'élimination*), in der er nach einer allgemeinen Lösungsformel für lineare Gleichungssysteme mit n Gleichungen suchte. Bereits Ende



des 17. Jahrhunderts hatten - jeweils unabhängig voneinander - der japanische Mathematiker SEKI KOWA TAKAKAZU (1683) und GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1693) Matrizen als Koeffizientenschemata für lineare Gleichungssysteme untersucht und die zugehörigen Determinanten zur Lösung verwendet.



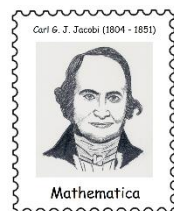
VANDERMONDE betrachtete als Erster Determinanten als alternierende, multilineare Funktionen und untersuchte systematisch deren Eigenschaften, u. a. stellte er fest:

Eigenschaften von Determinanten

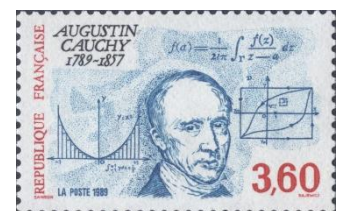
- Vertauscht man zwei Zeilen bzw. zwei Spalten einer Matrix, dann ändert sich das Vorzeichen der Determinante, d. h., bei geradzahliger Anzahl von Vertauschungen verändert sich das Vorzeichen nicht.
- Stimmen zwei Zeilen oder zwei Spalten einer Matrix überein, dann ist die Determinante gleich null.
- Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man das Vielfache einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) addiert.

Das, was man heute unter einer VANDERMONDE-Determinante versteht, findet sich allerdings weder in dem o. a. *Mémoire* noch in einem seiner anderen Beiträge.

Die historisch falsche Zuordnung ist möglicherweise dadurch entstanden, dass sowohl AUGUSTIN CAUCHY als auch CARL GUSTAV



JAKOB JACOBI im Zusammenhang mit der Theorie der Matrizen und Determinanten mehrfach auf die Verdienste VANDERMONDES hinwiesen und dies dann von anderen mit falschem Bezug immer wieder übernommen wurde, bis schließlich der Begriff im 20. Jahrhundert etabliert war.



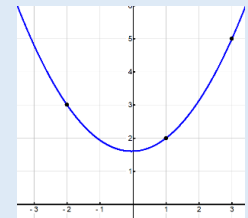
Anwendung der Vandermonde-Determinante im Falle $n = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot x_2^2 + x_0 \cdot x_1^2 + x_2 \cdot x_0^2 - x_1 \cdot x_0^2 - x_2 \cdot x_1^2 - x_0 \cdot x_2^2 = (x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)$$

Problem: Gesucht sind die Koeffizienten einer quadratischen Funktion $p(x) = a + bx + cx^2$, deren Graph durch die folgenden Punkte verlaufen soll: $(-2|3)$, $(1|2)$ und $(3|5)$.

Trägt man die Werte $x_0 = -2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ in die VANDERMONDE-Matrix ein und berechnet die zugehörige Determinante, dann stellt man fest, dass diese ungleich null ist (vgl. rechts). Dies bedeutet, dass das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$



Die Koeffizienten ergeben sich aus dem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + 4c = 3 \\ a + b + c = 2 \\ a + 3b + 9c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{5} \\ b = \frac{1}{30} \\ c = \frac{11}{30} \end{cases}$$

Eine dritte Arbeit VANDERMONDES mit dem Titel *Remarques sur les problèmes de situation* (Bemerkungen zu den Lageproblemen) beschäftigte sich mit dem Rösselsprung auf dem Schachbrett; es enthielt auch Überlegungen, die man heute der Graphentheorie zuordnen würde. In seiner vierten Arbeit, *Mémoire sur des irrationnelles des différents ordres avec une application au cercle* (Anmerkungen über irrationale Zahlen verschiedener Ordnungen mit einer Anwendung auf den Kreis) untersuchte er Produkte mit k abnehmenden Faktoren $[n]^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$, also mit $[n]^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, insbesondere $[n]^0 = 1$, $[n]^1 = n$, ..., $[n]^n = n!$ (hier mit dem Fakultätensymbol '!' notiert, wie es heute üblich ist, das aber erst 1808 vom elsässischen Mathematiker CHRISTIAN KAMP „erfunden“ wurde).

Weiter definierte VANDERMONDE $[n]^{-k} = \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \dots \cdot (n+k)} = \frac{1}{[n+k]^k} (= \frac{n!}{(n+k)!})$, wobei $[0]^{-k} = \frac{1}{k!}$, also $[0]^{-1} = 1$, $[0]^{-2} = \frac{1}{2}$, $[0]^{-3} = \frac{1}{6}$, Dann erweiterte er diese Definitionen auch auf Bruchzahlen n , k , sodass sich für das WALLIS'sches Produkt $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots}$ die Darstellung $\frac{\pi}{2} = [\frac{1}{2}]^{\frac{1}{2}} \cdot [-\frac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}}$ ergibt. Weiter zeigte er: $\sqrt{\pi} = 2 \cdot [\frac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}$, $[\frac{1}{2}]^{\frac{1}{3}} \cdot [-\frac{1}{2}]^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ und $[\frac{1}{2}]^{\frac{1}{4}} \cdot [-\frac{1}{2}]^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$.

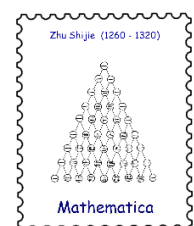
Auch Binomialkoeffizienten lassen sich hiermit notieren: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = [n]^k \cdot [0]^{-k}$,

für die Binomialreihe gilt: $(1+x)^n = 1 + [n]^1 \cdot [0]^{-1} \cdot x + [n]^2 \cdot [0]^{-2} \cdot x^2 + [n]^3 \cdot [0]^{-3} \cdot x^3 + \dots$

Es ist nicht mehr nachvollziehbar, durch wen und von wann an die Gleichung $\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$ die Bezeichnung *VANDERMONDE-Identität* erhalten hat.

Im englischen Sprachbereich wird sie als *CHU-VANDERMONDE identity* bezeichnet, da die Beziehung bereits dem chinesische Mathematiker ZHU SHIJIE (1260-1320) bekannt war. In VANDERMONDES Schriften und hinterlassenen Manuskripten ist sie jedenfalls nicht zu finden.

Diese Identität kann auf unterschiedliche Arten bewiesen werden:

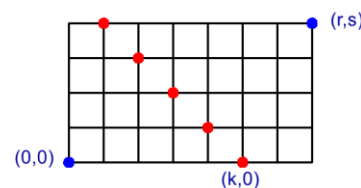


Algebraisch: $(1+x)^r \cdot (1+x)^s = \left[\sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \cdot x^i \right] \cdot \left[\sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \cdot x^j \right] = \sum_{k=0}^{r+s} \binom{r+s}{k} \cdot x^k = (1+x)^{r+s}$

Kombinatorisch: k Kugeln werden aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln gezogen. Für die Zusammensetzung dieser Stichprobe gibt es so viele Möglichkeiten:

$$\binom{r}{0} \cdot \binom{s}{k} + \binom{r}{1} \cdot \binom{s}{k-1} + \binom{r}{2} \cdot \binom{s}{k-2} + \dots + \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{0} = \binom{r+s}{k}$$

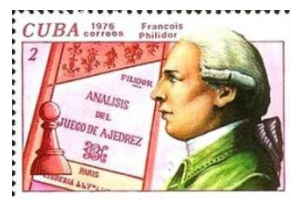
Geometrisch: Anzahl der Wege der Länge $r+s$ auf einem Gitternetz vom Ursprung zum Punkt $(r|s)$ - nach k Schritten wird eine Zwischenbilanz gezogen: Die Anzahl der Wege bis zum Zwischenpunkt wird jeweils mit der Anzahl der verbleibenden Wege multipliziert.



Nach seinen vier Abhandlungen zur Mathematik widmete sich VANDERMONDE anderen Bereichen: 1778 legte er der Académie ein neues Harmoniesystem vor, das er zuvor mit verschiedenen Komponisten diskutiert hatte,



darunter mit CHRISTOPH WILLIBALD GLUCK und FRANÇOIS-ANDRÉ DANICAN PHILIDOR (der weitgereiste PHILIDOR galt zu dieser Zeit auch als weltbesten Schachspieler). Die fachlichen Meinungen über VANDERMONDE waren geteilt: Die Musiker hielten ihn für einen hervorragenden Mathematiker, die Mathematiker schätzten ihn als hervorragenden Musiker.



- VANDERMONDE war überzeugt, dass die von BENJAMIN FRANKLIN (Erfinder u. a. des Blitzableiters) entwickelte *Harmonica de verre* besonders geeignet wäre, seine musikalischen Ideen zu realisieren (die *Glasharmonika* besteht aus sich drehenden, chromatisch gestimmten Gläsern; Töne werden durch Reibung mit dem Finger erzeugt).

Mit ÉTIENNE BÉZOUT und ANTOINE LAVOISIER führte er 1776 Experimente zu niedrigen Temperaturen durch. Zusammen mit GASPARD MONGE und CLAUDE-LOUIS BERTHOLLET testete er verschiedene Kombinationen von Eisen und Kohlenstoff, um die Qualität des Stahls zu verbessern. Seine Zusammenarbeit mit MONGE war übrigens so eng, dass Spötter VANDERMONDE auch „femme de Monge“ (MONGES Frau) nannten.

Auch interessierte er sich für die Automaten, die der Ingenieur JACQUES DE VAUCANSON erfunden und gesammelt hatte; als dieser 1783 starb, übernahm VANDERMONDE die Sammlung (*Cabinet des Mécaniques du Roi*), die ab 1794 zum *Conservatoire national des arts et métiers* gehörte, an dessen Leitung er sich ebenfalls beteiligte.

Überzeugt von den Ideen der Französischen Revolution engagierte er sich bei der Gründung wichtiger Institutionen der jungen Republik: Er übernahm das Amt für die Bekleidung der Streitkräfte, war Mitglied der *Kommission für Maße und Gewichte* (Einführung des metrischen Systems) und der Denkmalschutz-Behörde (*Commission des monuments*). Zusammen mit PIERRE-SIMON LAPLACE, JOSEPH-LOUIS LAGRANGE und GASPARD MONGE kümmerte er sich 1794 um die inhaltliche und strukturelle Ausgestaltung der neu gegründeten *École Normale Supérieure*, wo er im Februar 1795 eine Professur für politische Ökonomie übernahm. Aufgrund seiner Tuberkulose-Erkrankung konnte er jedoch nur acht Vorlesungen halten; dann war er mit seinen Kräften am Ende.

