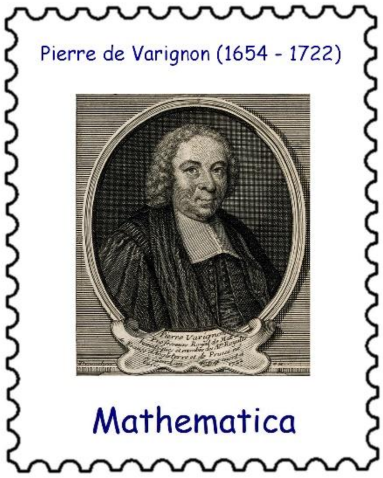
Oktober 2022

Vor 300 Jahren starb **PIERRE DE VARIGNON** (1654 – 23.12.1722)

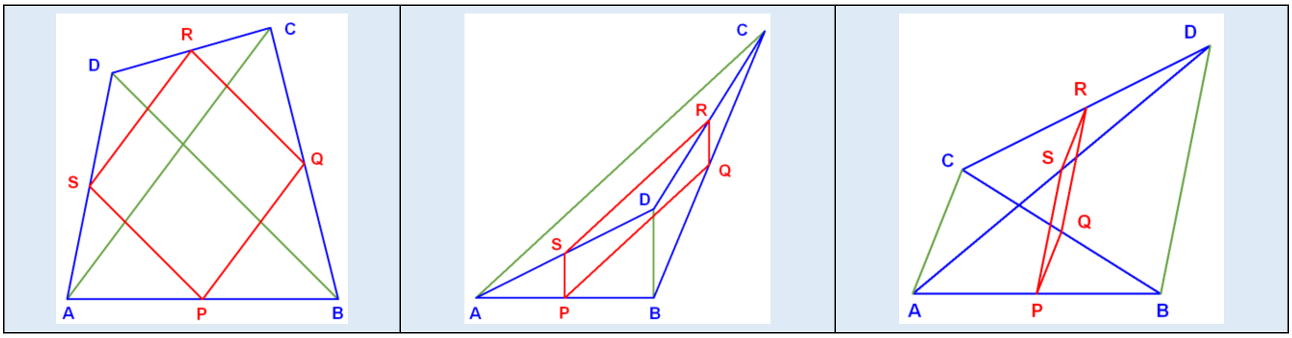


Es ist eine erstaunliche Tatsache, dass einer der schönsten und einfachsten Sätze der Geometrie nicht von EUKLID (oder von einem anderen Mathematiker der Antike) entdeckt wurde, sondern erst zweitausend Jahre später. Den Satz findet man im Buch *Elemens de Mathématique* des französischen Mathematikers PIERRE DE VARIGNON, erschienen 1731, neun Jahre nach dem Tod des Autors.

Die Herausgeber schreiben im Vorwort: *Die Grundsätze der Geometrie werden in diesem Werk mit so viel Klarheit und Genauigkeit entwickelt, die Sätze werden auf so einfache und natürliche Weise aneinandergereiht, die Beweise sind so kurz und einfach, dass man darin leicht die Überlegenheit eines Genies erkennen wird, der dieses Buch verfasst hat.*

Satz: Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seiten eines Vierecks miteinander, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Fläche halb so groß ist wie die des Vierecks und dessen Umfang so groß ist wie die Summe der Längen der beiden Diagonalen.

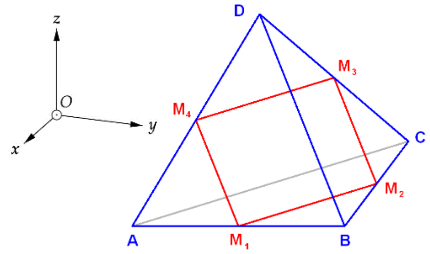
Dieser Satz von VARIGNON gilt für beliebige ebene Vierecke – für konvexe Vierecke, bei denen die Diagonalen innerhalb des Vierecks verlaufen, für konkave Vierecke, bei denen eine Diagonale innerhalb und eine außerhalb des Vierecks verläuft, sowie für überschlagene Vierecke, bei denen beide Diagonalen außerhalb des Vierecks verlaufen.



MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Dass der erste Teil des Satzes auch im 3-Dimensionalen gilt, also für Vierecke, deren Eckpunkte nicht notwendig in einer Ebene liegen (Tetraeder), zeigt man üblicherweise am Anfang des Unterrichts der Vektorgeometrie:

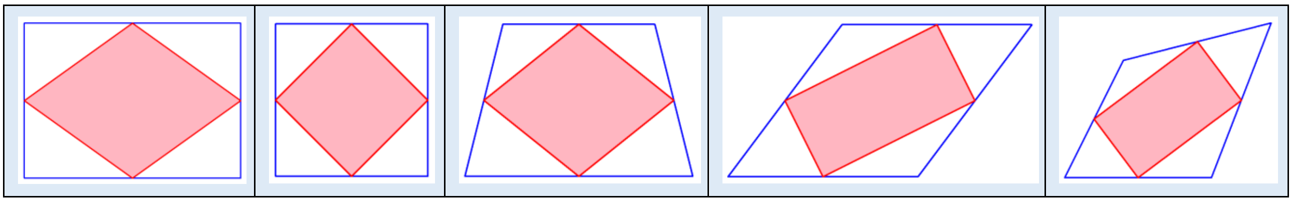
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) - \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,,$$
$$\overrightarrow{M_4M_3} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}) - \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,,$$
$$\overrightarrow{M_1M_4} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}) - \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}\,,$$
$$\overrightarrow{M_2M_3} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}) - \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}\,.$$



Aus allen Figuren wird deutlich, dass sich die Parallelität von Verbindungslinien benachbarter Seitenmitten zu einer der Diagonalen aus dem 2. Strahlensatz ergibt (*Elemente* VI,2); und hieraus folgen auch die Aussagen über Flächeninhalt und Umfang.

> *Elemente VI,2: Eine Parallele zu einer Seite des Dreiecks teilt die beiden anderen Seiten im gleichen Verhältnis, und werden im Dreieck zwei Seiten im gleichen Verhältnis geteilt, dann ist die Gerade durch die teilenden Punkte parallel zur übrigen Seite.*

Interessant ist es, die Sonderfälle des Satzes von VARIGNON zu untersuchen:



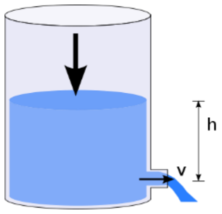
PIERRE VARIGNON wird als Sohn eines Baumeisters in Caen (Normandie) geboren, wo er (vermutlich) die Jesuitenschule besucht und auf den Priesterberuf vorbereitet wird. Im Alter von 22 Jahren legt er sein Gelübde ab, darauf folgt ein Studium, das er 1682 mit der Magisterprüfung abschließt; danach wird er als Priester eingesetzt.

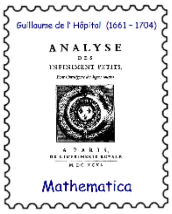
Während des Studiums freundet er sich mit CHARLES CASTEL an, ABBÉ DE SAINT-PIERRE, später einer der bedeutendsten Philosophen der Aufklärung in Frankreich, berühmt wegen seines *Projet pour rendre la paix perpétuelle en Europe* (Plan eines ewigen Friedens in Europa). Der aus reichem Hause stammende CASTEL ist auf Einkünfte aus dem Priesterberuf nicht angewiesen; er lässt VARIGNON an seiner finanziellen Unabhängigkeit teilhaben. CASTELs besonderes Interesse gilt der Mathematik; nach dem Studium der *Elemente* des EUKLID und der *Géometrie* von RENÉ DESCARTES öffnet sich auch für VARIGNON eine neue Welt.

1686 gehen die beiden nach Paris und nehmen dort Kontakt zu anderen Wissenschaftlern auf. Bereits im darauffolgenden Jahr veröffentlicht VARIGNON einen ersten Beitrag (über Flaschenzüge mit Umlenkungen) sowie das Buch *Projet d'une nouvelle méchanique*, in dem er zeigt, wie man die in den Vorjahren erschienenen Beiträge von GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ zur Differenzialrechnung auf Probleme der Mechanik anwenden kann. Das Buch führt 1688 zur Aufnahme VARIGNONs in die Abteilung *Géometrie* der *Académie des Sciences*.

Am *Collège Mazarin* der Universität von Paris wird für ihn eine Stelle als Professor für Mathematik eingerichtet; dort lehrt er 34 Jahre lang – bis zu seinem Tod. 1704 kommt noch eine Professur am *Collège Royal* hinzu (nominell ist dies eine Professur für griechische und lateinische Philosophie, aber ohne Auflagen bezüglich des Lehrinhalts).

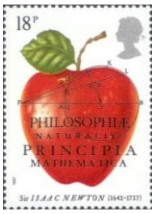
Varignon beschäftigt sich mit verschiedenen Anwendungen der Differenzialrechnung auf Probleme der Mechanik (Kräfteparallelogramm, Drehmoment, Gleichgewicht von Flüssigkeiten), u. a. bestätigt er die von Evangelista Torricelli in Jahr 1644 experimentell entdeckte Gesetzmäßigkeit, dass die Ausflussgeschwindigkeit v von Flüssigkeiten nur von der Höhe h (Abstand der Flüssigkeitskeitsoberfläche von der Öffnung) abhängt (es gilt: $v = \sqrt{2gh}$). Er führt den Begriff der Momentangeschwindigkeit ein und zeigt, dass man die Beschleunigung eines Körpers hieraus durch Differenziation erhält. Seine Einzelbeiträge gehen jedoch in der Fülle der Veröffentlichungen unter.

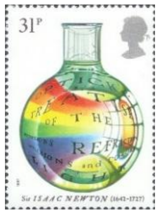




1692 lernt Varignon den aus Basel stammenden Mathematiker Johann Bernoulli kennen, eine lebenslange Freundschaft zwischen den beiden entsteht. 1696 erscheint Guillaume l'Hospitals *Analyse des infiniment petits*, das erste Buch zur Leibniz'schen Differenzialrechnung, das im Wesentlichen auf Materialien Johann Bernoullis beruht. Zu den Kritikern des Werks gehört Michel Rolle, der sich mathematischer Tradition und Exaktheit verpflichtet fühlt, die seiner Meinung nach durch die Betrachtung unendlich kleiner Größen verloren geht. Varignon hingegen verteidigt das Arbeiten mit infinitesimalen Größen, warnt aber auch vor zu fahrlässigem Umgang. Nachdem es in den Sitzungen der *Académie* immer wieder zu heftigen Auseinandersetzungen zwischen den Traditionalisten und den Erneuerern kommt, beschließt die Leitung, das Thema nicht mehr auf die Tagesordnung zu setzen.

1712 wird Varignon zum Direktor der *Académie des Sciences* ernannt; trotz seiner guten Beziehungen sowohl zu Leibniz wie auch zu Isaac Newton gelingt es ihm nicht, im Prioritätsstreit zu vermitteln. Seine Position zwischen den beiden Lagern wird von beiden Seiten respektiert und anerkannt. Als 1713 die zweite Auflage der *Principia* erscheint, schickt Newton ihm eines seiner sechs Exemplare. Von der zweiten Auflage der *Opticks* sendet Newton drei Exemplare an die *Académie*, ein Exemplar leitet Varignon an Johann Bernoulli weiter, in der Hoffnung, durch diese Geste eine Brücke zu bauen. In seinem Dankesschreiben an Newton bringt Varignon sein tiefes Bedauern zum Ausdruck, dass durch die andauernden Streitigkeiten zwischen dem Newton'schen und dem Leibniz'schen Lager ein sinnvoller Austausch verhindert wird. Als 1722 die Korrespondenz zwischen Bernoulli und Newton wieder einmal ausartet, schaltet sich Varignon ein und versucht gemeinsam mit dem im Londoner Exil lebenden Abraham de Moivre zu vermitteln.





Varignons Beiträge und seine Rolle als Vermittler zwischen den Lagern wird u. a. auch durch seine Aufnahme in die *Preußische Akademie der Wissenschaften* (1713) und die *Royal Society* (1718) anerkannt. Seine umfangreiche Lehrtätigkeit, die Übernahme der verantwortungsvollen Position als Leiter der *Académie* und die damit verbundene umfangreiche Korrespondenz hindern Varignon, seine eigenen Ideen auszuarbeiten. Nach seinem Tod stellen ehemalige Schüler seine Unterrichtsnotizen zum Unterrichtswerk *Elemens de mathématique* zusammen.