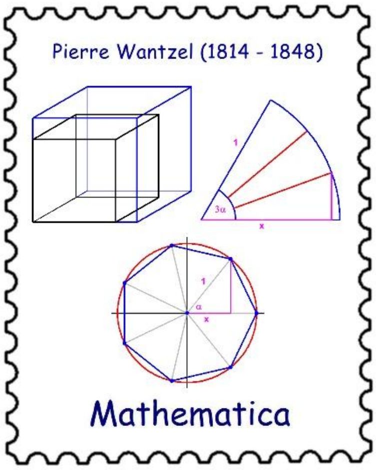
# Oktober 2025

Vor 211 Jahren geboren **Pierre Wantzel** (05.06.1814 – 21.05.1848)




Über zwei Jahrtausende lang bemühten sich Mathematiker vergeblich darum, vier “klassische” geometrische Probleme mithilfe einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal zu lösen:

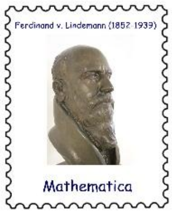
- die Seitenlänge eines Würfels zu konstruieren, dessen Volumen doppelt so groß ist wie das des Einheitswürfels,
- einen beliebigen Winkel durch Konstruktion in drei gleich große Teilwinkel zu unterteilen,
- ein regelmäßiges Polygon mit beliebiger Eckenzahl zu konstruieren,
- ein Quadrat zu konstruieren, das flächengleich zum Einheitskreis ist.

Als 1837 ein 23-jähriger Franzose die ersten drei dieser vier Probleme löste, indem er die *grundsätzliche* Unmöglichkeit einer Konstruktion bewies, geschah dies ohne besonderes Aufsehen in der Wissenschaftsgemeinschaft, obwohl sein 7-seitiger Beitrag in einer der angesehensten Zeitschriften der damaligen Zeit erschienen war, nämlich im *Journal de mathématiques pures et appliquées* (auch *Liouville's Journal* genannt).

Noch 15 Jahre nach der Veröffentlichung dieses Beitrags korrespondierte WILLIAM ROWAN HAMILTON mit AUGUSTUS DE MORGAN über die Frage, ob nicht doch vielleicht eines Tages eine Konstruktion gefunden werden könnte, einen beliebigen Winkel zu dritteln, hätte man doch „… vor 100 Jahren auch nicht geglaubt, dass man ein regelmäßiges 17-Eck konstruieren könne …“, was CARL FRIEDRICH GAUSS im Jahr 1796 gelungen war. Selbst der Geometrie-Experte FELIX KLEIN war sich noch Jahrzehnte danach unsicher, ob in der Zwischenzeit tatsächlich strenge Beweise veröffentlicht worden waren. In der *Encyklopädie der Elementar-Mathematik* von H. WEBER und J. WELLSTEIN aus dem Jahr 1905 heißt es noch allgemein: *„Erst seit der Begründung der modernen Algebra durch Gauß und Abel kann streng bewiesen werden, daß die Dreiteilung des Winkels und die Konstruktion der regelmäßigen Vielecke nur in gewissen ausgezeichneten Fällen mit Zirkel und Lineal exakt durchführbar ist.“*, aber nicht, dass dies bewiesen wurde. Erst 1937, also genau 100 Jahre nach seiner Veröffentlichung, wird PIERRE WANTZEL in JOHANNES TROPFKEs *Geschichte der Elementarmathematik* als der Erste bezeichnet, der exakte Beweise vorgelegt hat.


| MO | DI | MI | DO | FR | SA | SO |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | | |

Dass es ein Jahrhundert lang gedauert hat, bis die Veröffentlichung Wantzels wahrgenommen wurde, mag verschiedene Gründe haben. Zum einen war der Autor so gut wie unbekannt – und blieb es auch, da er nicht einmal 34 Jahre alt wurde und bis zu seinem frühen Tod nicht mehr viele Möglichkeiten hatte, bekannt zu werden. Zum anderen wurden diese Unmöglichkeitsbeweise wohl nicht als wichtig angesehen, hatte doch Gauss in seinen *Disquisitiones Arithmeticae* von 1801 hinsichtlich der Konstruierbarkeit der regelmäßigen $n$-Ecke gezeigt, dass sie allein mit Zirkel und Lineal möglich sind, wenn $n$ sich darstellen lässt als Produkt $n = 2^r \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_s$ einer $2$er-Potenz mit *voneinander verschiedenen* Fermat-Primzahlen (das sind Primzahlen der Form $p_k = 2^{2^k} + 1$, also $3, 5, 17, 257, \ldots$). Gauss behauptete nun weiter, dass man keine anderen regelmäßigen $n$-Ecke konstruieren könne, allerdings verzichtete er – wie er schrieb – aus Platzmangel auf einen Beweis. Mit seinem Hinweis wollte er anderen die Mühe ersparen, nach einer Konstruktion zu suchen, die es seiner Überzeugung nach nicht gab. Insofern schien Wantzels Artikel auch nur wenig Neues zu enthalten, obwohl Gauss den Beweis der Nicht-Konstruierbarkeit für die anderen Ecken-Anzahlen gar nicht geführt hatte.




Als später dann Ferdinand von Lindemann im Jahr 1882 beweisen konnte, dass die Quadratur des Kreises konstruktiv nicht möglich ist, galt das Thema der „klassischen Probleme des Altertums" in der mathematischen Forschung endgültig als „abgeschlossen". – Trotz der Veröffentlichung Tropfkes (s. o.) wurden die Verdienste Pierre Wantzels auch in später erschienenen Mathematikbüchern oft nicht erwähnt, eher neigten die Autoren dazu, Gauss, Abel oder sogar Lindemann pauschal die Ehre zuteil werden zu lassen.

Die Familie von Pierre Laurent Wantzel stammte väterlicherseits ursprünglich aus Deutschland. Sein Vater Frédéric war 1814 – drei Monate vor Pierres Geburt – in die französische Armee eingetreten und diente dort sieben Jahre lang. In dieser Zeit lebte Pierre mit seiner Mutter bei deren Eltern in Ecouen (nahe Paris). Nach der Rückkehr des Vaters übernahm dieser eine Tätigkeit als Mathematik-Professor an der *École spéciale du commerce*. Während seiner Grundschulzeit war Pierre bei seinem Lehrer untergebracht, der auch als Vermesser tätig war; bereits hier zeigte sich seine außergewöhnliche Auffassungsgabe, konnte er diesem sogar dabei helfen, schwierige Vermessungsprobleme zu lösen.

1826 wechselte Pierre an die *École des Arts et Métiers* in Châlons; hier fühlte er sich jedoch unwohl und wenig gefordert, da eher handwerkliche Fertigkeiten im Vordergrund standen. Nach inständigem Bitten erlaubte ihm sein Vater den Wechsel an eine Schule in Paris, deren Leiter M. Lievyns ihm die fehlenden Latein- und Griechischkenntnisse vermittelte, bevor er endlich 1828 an das *Collège Charlemagne* wechseln konnte. (M. Lievyns wurde übrigens 14 Jahre später sein Schwiegervater.)

An der neuen Schule zeigten sich seine vielfältigen Begabungen: Erste Preise beim schulinternen Latein- und Französisch-Wettbewerb, ein zweiter Preis beim Pariser Latein-Wettbewerb, dann erste Preise beim landesweiten Wettbewerb in Physik und Mathematik (*Concours général*). Seinen Mathematiklehrer unterstützte er, indem er die Druckfahnen zu dessen *Traité d'arithmétique* korrigierte. Mit 18 Jahren absolvierte Pierre sowohl die Aufnahmeprüfung an der *École polytechnique* als auch an der *École normale* jeweils als Jahrgangsbester, was bis dahin noch niemandem gelungen war.


Nach erfolgreichem Studium an der *École polytechnique* wechselte WANTZEL 1834 an die *École nationale des ponts et chaussées* (was durchaus üblich war). Da er jedoch kein „mittelmäßiger Ingenieur" werden wollte, sondern eher die Möglichkeit suchte, sich intensiver mit Mathematik beschäftigen zu können, wollte er sich beurlauben lassen – mit dem Ergebnis, dass er beauftragt wurde, an der Hochschule als Repetitor tätig zu werden. Diese Aufgabe übernahm er parallel auch an der *École polytechnique*, später wurde er von dieser Hochschule zusätzlich mit der Durchführung der Aufnahmeprüfungen beauftragt. Immer wieder übernahm er – mit großem Erfolg – Vertretungsunterricht am *Collège Charlemagne*. Nachdem ihm 1840 der Titel eines Ingenieurs verliehen worden war, reiste er als Prüfer von technischen Einrichtungen durch das ganze Land, sich keine Pausen gönnend.

Trotz der langen, anstrengenden Arbeitstage verfasste WANTZEL eine Reihe von wissenschaftlichen Beiträgen, etwa über das Krümmungsverhalten elastischer Stäbe und über Gesetze des Drucks von Flüssigkeiten, wie sie an den Kanalschleusen herrschen, zur Integration gewisser Integralgleichungen und nicht zuletzt seinen Beitrag zur Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal. 1845 veröffentlichte er noch eine Vereinfachung des Beweises von NIELS HENDRIK ABEL bzgl. der Unmöglichkeit, Gleichungen fünften Grades allgemein durch Radikale zu lösen.


In seiner Rastlosigkeit bemerkte er nicht, wie er seine Gesundheit ruinierte; die Müdigkeit überwand er mit Kaffee und Opium, nahm nur unregelmäßig Mahlzeiten zu sich. Dies änderte sich kaum, nachdem er geheiratet hatte – er starb im Alter von nur 33 Jahren, ohne ausreichend für seine Witwe und die beiden Töchter gesorgt zu haben.

In seiner Schrift aus dem Jahr 1837 *Recherche sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre à la règle et au compas* hatte WANTZEL den folgenden Satz bewiesen:

- Eine reelle Zahl $r$ (eine Strecke der Länge $|r|$) ist *genau dann* mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn sie eine irreduzible Gleichung vom Grad $2^k$ ($k > 1$) erfüllt.

Ausgehend von einer Einheitsstrecke auf dem Zahlenstrahl ($x$-Achse) führen die elementaren Konstruktionen, wie sie in EUKLIDs *Elementen* beschrieben sind, im ersten Schritt zu Punkten, deren Koordinaten als Lösung einer linearen oder einer quadratischen Gleichung auftreten; in einem nächsten Konstruktionsschritt können nur Koordinaten auftreten, die Nullstellen von Polynomen 1., 2. oder 4. Grades sind usw.

Die Verdopplung des Einheitswürfels führt zu einem Würfel mit Seitenlänge $\sqrt[3]{2}$; das zugehörige Minimalpolynom ist $x^3-2$, also ein Polynom 3. Grades. Bei der Dreiteilung eines Winkels betrachtet man den Additionssatz $\cos(3\alpha)=4\cos^3(\alpha)-3\cos(\alpha)$; z. B. für $3\alpha=60°$ und $x=\cos(\alpha)$ ist die Gleichung $\frac{1}{2}=4x^3-3x$ zu lösen, das zugehörige Minimalpolynom ist $8x^3-6x-1$, also ein Polynom 3. Grades, für das keine rationale Lösung existiert. Von den regelmäßigen $n$-Ecken ist z. B. das 7-Eck nicht konstruierbar, da hier für den Zentriwinkel $\alpha$ gilt: $\cos(3\alpha)=\cos(4\alpha)$, also $4\cos^3(\alpha)-3\cos(\alpha)=8\cos^4(\alpha)-8\cos^2(\alpha)+1$. Mit $x=\cos(\alpha)$ ergibt sich die Beziehung $4x^3-3x=8x^4-8x^2+1$, nach Division durch den Linearfaktor $(x-1)$ führt dies zu $8x^3+4x^2-4x-1$, wieder zu einem Polynom 3. Grades.